Eléments du calcul des probabilités

Formulaire d'examen

Variables aléatoires discrètes à valeurs réelles

Soit $\mathcal{X}$ une *variable aléatoire discrète à valeurs réelles.*

La *fonction de répartition de* $\mathcal{X}$ est définie par $\boxed{F_{\mathcal{X}}(x) = P(\mathcal{X}(\omega) < x)}$

L'*espérance mathématique de* $\mathcal{X}$ est définie par $\boxed{E\{\mathcal{X}\} = \sum x_i P_{\mathcal{X}}(x_i)}$
(si cette somme converge)

La *variance et l'écart-type de* $\mathcal{X}$ sont définis respectivement par

$$\boxed{V\{\mathcal{X}\} = E\{(\mathcal{X} - E\{\mathcal{X}\})^2\} = E\{\mathcal{X}^2\} - E\{\mathcal{X}\}^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma_{\mathcal{X}} = \sqrt{V\{\mathcal{X}\}}}$$

Loi binomiale

Une *variable aléatoire de Bernoulli* est une variable aléatoire qui lors d'une expérience ne prend que deux valeurs. Un des résultats est appelé *succès* (p = P(succès)) et l'autre *échec* (q = P(échec)).

Répétons n fois une telle expérience. Lorsque ces n expériences sont indépendantes et que p est constant, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ représentant le nombre de succès obtenus est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p : $\mathcal{B}(n, p)$.

Alors,

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{\mathcal{X}}(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \\ E\{\mathcal{X}\} = np \\ V\{\mathcal{X}\} = npq \end{array}}$$

Loi géométrique

Mêmes conditions que pour la loi binomiale mais cette fois le nombre d'essais n'est plus limité et $\mathcal{X}$ représente le nombre d'essais <u>avant</u> d'obtenir le premier succès.

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{\mathcal{X}}(k) = q^k p \\ E\{\mathcal{X}\} = \frac{q}{p} \\ V\{\mathcal{X}\} = \frac{q}{p^2} \end{array}}$$

Loi de Poisson

Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ pouvant prendre pour valeurs 0, 1, 2, ... suit une *loi de Poisson de paramètre* λ, où $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$, si

$$\boxed{P_{\mathcal{X}}(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

Auquel cas $\boxed{E\{\mathcal{X}\} = V\{\mathcal{X}\} = \lambda}$

Variables aléatoires continues à valeurs réelles

La v.a. $\mathcal{X}$ est continue si elle admet une *densité de probabilité* $f_{\mathcal{X}}(x)$ avec

$$\boxed{F_{\mathcal{X}}(b) - F_{\mathcal{X}}(a) = \int_a^b f_{\mathcal{X}}(x)dx}$$

$F_{\mathcal{X}}$ est alors dérivable et continue et on a

$$\boxed{f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{\partial F_{\mathcal{X}}(x)}{\partial x}}$$

Propriétés

a) $f_{\mathcal{X}}(x) \geq 0 \ \forall x \in \Re$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathcal{X}}(x)\ dx = 1$

En particulier $\boxed{F_{\mathcal{X}}(a) = P(\mathcal{X} < a) = \int_{-\infty}^{a} f_{\mathcal{X}}(x)dx}$

L'espérance mathématique d'une v.a. continue s'obtient par

$$\boxed{E\{\mathcal{X}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathcal{X}}(x)dx}$$

(si cette intégrale converge absolument)

Remarque : cette intégrale n'est pas toujours définie
(exemple : v.a. de Cauchy)

Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev

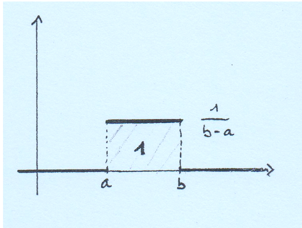
Soit une variable aléatoire $\mathcal{X}$ d'espérance $\mu_{\mathcal{X}}$ et d'écart-type $\sigma_{\mathcal{X}}$.

$$\boxed{\forall c > 0 \quad P(|\mathcal{X} - \mu_{\mathcal{X}}| \geq c\sigma_{\mathcal{X}}] \leq \frac{1}{c^2}}$$

Loi uniforme

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une *loi uniforme* sur [a, b] si

$$\boxed{f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

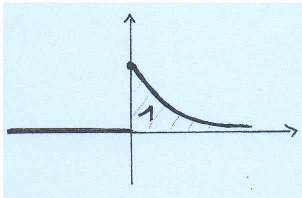


Dans ce cas, $E\{\mathcal{X}\} = \frac{a+b}{2}$ et $V\{\mathcal{X}\} = \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi exponentielle

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une *loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ si

$$\boxed{f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

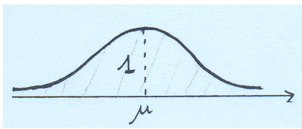


Dans ce cas, $E\{\mathcal{X}\} = \frac{1}{\lambda}$ et $V\{\mathcal{X}\} = \frac{1}{\lambda^2}$

Loi normale

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une *loi normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si

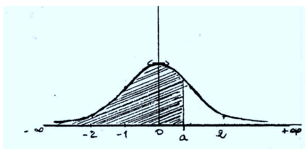
$$\boxed{f_{\mathcal{X}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



Dans ce cas, $E\{\mathcal{X}\} = \mu$ et $V\{\mathcal{X}\} = \sigma^2$.

On appelle *variable aléatoire normale centrée réduite*, une variable aléatoire $\mathcal{N}(0, 1)$. Si $\mathcal{X} = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{X}-\mu}{\sigma}$ est $\mathcal{N}(0, 1)$.

La table 1 (page suivante) donne l'aire sous la courbe normale centrée réduite située entre $-\infty$ et a, $\forall a \in \mathbb{R}_+$. Cette aire correspond à $P(Z \leq a)$. Par symétrie de la courbe de Gauss, on peut en déduire $P(i \leq Z \leq j)$, $\forall i, j \in \mathbb{R}$.



On peut facilement déduire l'aire sous la courbe normale de la centrée réduite :

$$P(i \leq \mathcal{X} \leq j) = P(\tfrac{i-\mu}{\sigma} \leq \mathcal{Z} \leq \tfrac{j-\mu}{\sigma})$$

TABLE 1 – Exemple de lecture de la table : $P(\mathcal{Z} \leq 1,46) = 0,92785$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999
3,8	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999	0,99999
3,9	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Approximations

- Lorsque $npq \geq 10$, on constate que la distribution binomiale tend vers la distribution normale de moyenne np et de variance npq.

  Plus précisément, pour une variable $\mathcal{K}$ distribuée selon une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et une variable $\mathcal{X}$ distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = npq)$, on a : $P(a \leq \mathcal{K} \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq \mathcal{X} \leq b + \frac{1}{2})$
- Lorsque $\lambda \geq 10$ on constate que la distribution de Poisson tend vers la distribution normale de moyenne λ et de variance λ. Si $\mathcal{K}$ est une variable distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{X}$ une variable distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$, on a : $P(a \leq \mathcal{K} \leq b) \approx P(a - \frac{1}{2} \leq \mathcal{X} \leq b + \frac{1}{2})$

Deux variables aléatoires discrètes

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux variables aléatoires dont les univers respectifs sont $\Omega_{\mathcal{X}} = \{x_1, ..., x_k\}$ et $\Omega_{\mathcal{Y}} = \{y_1, ..., y_l\}$. On définit

a) La *loi de probabilité conjointe* : $\boxed{P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_i, y_j) = P([\mathcal{X} = x_i] \wedge [\mathcal{Y} = y_j])}$

b) La *loi marginale de* $\mathcal{X}$: $\boxed{P_{\mathcal{X}}(x_i) = \sum_{j=1}^{l} P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_i, y_j)}$

(celle de $\mathcal{Y}$ se déduit par analogie)

c) La *loi conditionnelle de* $\mathcal{X}$ *connaissant* $\mathcal{Y}$: $\boxed{P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}(x_i|y_j) = \frac{P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x_i, y_j)}{P_{\mathcal{Y}}(y_j)}}$

(celle de $\mathcal{Y}|\mathcal{X}$ se déduit par analogie)

d) L' *espérance conditionnelle de* $\mathcal{Y}$ *connaissant* $\mathcal{X}$: $\boxed{E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\} = \sum_{j=1}^{l} y_j P_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}(y_j|\mathcal{X})}$

(celle de $\mathcal{X}|\mathcal{Y}$ se déduit par analogie)

e) La covariance : $\boxed{cov\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\} = E\{\mathcal{X}\mathcal{Y}\} - E\{\mathcal{X}\}E\{\mathcal{Y}\}}$

f) Le coefficient de corrélation : $\boxed{\rho_{\mathcal{X};\mathcal{Y}} = \frac{cov\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}}{\sigma_{\mathcal{X}}\ \sigma_{\mathcal{Y}}}}$

Deux variables aléatoires conjointement continues

Deux variables aléatoires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont *conjointement continues* s'il existe une fonction positive $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a,b) = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)dxdy}$$

On appelle $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ la *densité conjointe* de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

Lorsque deux variables aléatoires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont conjointement continues, chacune de ces variables est continue. En particulier on a

a) La *densité marginale de* $\mathcal{X}$: $\boxed{f_{\mathcal{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$

(celle de $\mathcal{Y}$ se déduit par analogie)

b) La *fonction de répartition marginale de* $\mathcal{X}$: $\boxed{F_{\mathcal{X}}(a) = P(\mathcal{X} < a) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy}$

(celle de $\mathcal{Y}$ se déduit par analogie)

c) La *densité conditionnelle de* $\mathcal{Y}$ *connaissant* $\mathcal{X}$: $\boxed{f_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}(y|x) = \frac{f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)}{f_{\mathcal{X}}(x)}}$

(celle de $\mathcal{X}|\mathcal{Y}$ se déduit par analogie)

d) L' *espérance conditionnelle de* $\mathcal{Y}$ *connaissant* $\mathcal{X}$: $\boxed{E\{\mathcal{Y}|\mathcal{X}\} = \int_{\mathbb{R}} y f_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}(y|\mathcal{X})dy}$

(celle de $\mathcal{X}|\mathcal{Y}$ se déduit par analogie)

Remarque

Les variables aléatoires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont indépendantes si et seulement si

a) $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = f_{\mathcal{X}}(x)f_{\mathcal{Y}}(y)$

b) $F_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(a,b) = F_{\mathcal{X}}(a)F_{\mathcal{Y}}(b)$

Loi uniforme

$$\boxed{f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\int\int_U \mathrm{d}x\mathrm{d}y} & \text{si} \quad (x,y) \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

$$\boxed{P(E) = \frac{S_{E\cap U}}{S_U} \ \textit{avec}\ S_A = \int\int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$