

Solution et rapport de sensibilité avec GLPK

MATH0461-1 (Introduction à l'optimisation numérique) – 6 avril 2011

1 Notations

Pour des raisons d'efficacité, l'algorithme du simplexe peut traiter de manière spéciale

1. des bornes sur les variables,
2. des inégalités.

Pour cette raison, les solveurs ne travaillent pas toujours sur le problème en forme standard, mais plutôt sur une formulation plus générale

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & b_i^L \leq a_i^T x \leq b_i^U \quad i \in \{1, 2, \dots, M\} \\ & l_j \leq x_j \leq u_j \quad j \in \{1, 2, \dots, N\} \\ & x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

où les constantes b_i^L , b_i^U , l_j et u_j pourront éventuellement prendre les valeurs $\pm\infty$. Nous noterons la solution optimale de ce problème x^* , et les coûts réduits associés \bar{c} . Remarquons que dans un problème de minimisation (resp. maximisation), à l'optimalité, le coût réduit

- (a) d'une variable en base est nul,
- (b) d'une variable hors base à sa borne inférieure est positif (resp. négatif),
- (c) d'une variable hors base à sa borne supérieure est négatif (resp. positif).

La solution optimale correspondante du dual sera notée p^* .

2 Affichage

Dans les rapports de solution et de sensibilité, GLPK dénote par un point (.) les valeurs zéro (afin de les différencier, par exemple, d'un petit nombre positif qui serait affiché 0.00000). L'infinité ∞ est notée **Inf** ou **Infinity**. Les champs non applicables sont laissés vides.

3 Solution

Le fichier texte décrivant la solution est composé de deux sections. La première indique les propriétés des contraintes (évaluées en la solution optimale trouvée). En plus de rappeler les membres de droite (b_i^L et/ou b_i^U), elle indique la valeur des membres de gauche évalués en la solution optimale ($a_i^T x^*$), et la valeur des variables duales associées à la base optimale (p_i^*). Dans la table des contraintes, **St** indique

- (a) **BS** – contrainte non serrée,
- (b) **NL** – contrainte serrée à borne inférieure,
- (c) **NU** – contrainte serrée à borne supérieure,
- (d) **NS** – contrainte d'égalité (toujours serrée),
- (e) **NF** – membre de gauche à $\pm\infty$.

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
i	contrainte i		$a_i^T x^*$	b_i^L	b_i^U	p_i^*

La seconde section concerne les variables. Elle indique la valeur de chaque variable dans la solution optimale (x_i^*), et son coût réduit (\bar{c}_j). Dans la table des variables, **St** indique

- (a) **BS** – variable en base,
- (b) **NL** – variable hors base à borne inférieure,
- (c) **NU** – variable hors base à borne supérieure,
- (d) **NS** – variable fixée,
- (e) **NF** – variable libre hors base (à valeur $\pm\infty$).

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
j	variable j		x_j^*	l_j	u_j	\bar{c}_j

4 Rapport de sensibilité

La présentation du rapport de sensibilité suit deux variantes, selon la version de GLPK.

4.1 GLPK < 4.42

Pour les versions antérieures à la version 4.42, le rapport de sensibilité présente trois sections correspondant aux trois types de paramètres que l'on analyse : les coûts, les membres de droite, les bornes sur les variables. Pour chacun de ces paramètres, le rapport indique dans quelle mesure il peut être augmenté ou diminué sans sortir de son intervalle de sensibilité. Dans les deux dernières sections le paramètre en question est celui qui correspond à la contrainte qui est serrée (il s'agit par exemple de u_j si la j ème variable est à sa borne supérieure, i.e. $x_j^* = u_j$). Référez-vous au manuel de GLPK pour plus de détails.

Objective Coefficient Analysis

No.	Column name	St	Value	Max increase	Max decrease
j	variable j		c_j		

Constraint Bounds Analysis

No.	Row name	St	Value	Max increase	Max decrease
i	contrainte i		b_i^L ou b_i^U		

Variable Bounds Analysis

No.	Column name	St	Value	Max increase	Max decrease
j	variable j		l_j ou u_j		

4.2 GLPK \geq 4.42

Pour les versions 4.42 et supérieures de GLPK, le rapport est composé de deux sections. La première indique la valeur des paramètres de sensibilité associés aux contraintes. En particulier, **Activity range** décrit l'intervalle de sensibilité d'un membre de droite. Le membre de droite en question est b_i^L ou b_i^U selon que c'est la contrainte $a_i^T x^* \geq b_i^L$ ou la contrainte $a_i^T x^* \leq b_i^U$ qui est serrée, respectivement.

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Lower bound Upper bound
i	contrainte i		$a_i^T x^*$	$\frac{s_i}{p_i^*}$	$\frac{b_i^L}{b_i^U}$
	Activity range	Obj coef range	Obj value at breaking point	Limiting variable	
	$b_i^L \min$ ou $b_i^U \min$ $b_i^L \max$ ou $b_i^U \max$				

La seconde section concerne les paramètres de sensibilité associés aux variables. **Activity range** donne l'intervalle de sensibilité de la borne active. **Obj coef range** donne l'intervalle de sensibilité du coût initial. Référez-vous au manuel de GLPK pour plus de détails.

No.	Column name	St	Activity	Obj coef Marginal	Lower bound Upper bound
j	variable j		x_j^*	$\frac{c_j}{\bar{c}_j}$	$\frac{l_j}{u_j}$
	Activity range	Obj coef range	Obj value at breaking point	Limiting variable	
	$l_j \min$ ou $u_j \min$ $l_j \max$ ou $u_j \max$	$c_j \min$ $c_j \max$			

4.3 Note

L'option en ligne de commande pour produire un rapport de sensibilité est documentée `--bounds` pour GLPK $<$ 4.42 et `--ranges` pour GLPK \geq 4.42. Cependant, par compatibilité, l'option `--bounds` peut toujours être utilisée.