Optimisation numérique – répétition 9
Branch and bound

5 mai 2011

Question 1. [Juin 2008]

Pour chacun des problèmes suivants, déterminez le type de problème d'optimisation dont il s'agit. Déterminez également s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Lorsque ce n'est pas indiqué, A est une matrice quelconque de taille $m \times n$ et b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \max & |x_1 + 2x_2| \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \text{pour tout } i = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \text{pour tout } i, j. \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 x_2 \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{ll} \max & \frac{1}{c^T x} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Question 2. [Août 2008]

Pour chacun des problèmes suivants, déterminez le type de problème d'optimisation dont il s'agit. Déterminez également s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre.

$$
\begin{array}{lll}
(a) & \min & |x_1 - 3x_2| \\
 & \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & & -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \\
 & & x_1 \geq 2, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
(b) & \max & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
 & \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \\
 & & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & \text{pour tout } i = 1, \ldots, m \\
 & & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & \text{pour tout } i, j.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(c) & \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^3 \\
 & \text{s.t.} & Ax = b \\
 & & x \in \mathbb{R}^n.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(d) & \min & 2x_1 - x_2 \\
 & \text{s.t.} & (x_1 + 3x_2)^3 \leq (2x_1 + x_2)^3 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Question 3. [Juin 2009]

Pour chacun des problèmes suivants, déterminez le type de problème d'optimisation dont il s'agit. Déterminez également s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Dans chaque cas, **si ce n'est pas précisé autrement**, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & \min & x_1 + x_2^2 & \\
 & \text{s.t.} & Ax = b & \\
 & & x \in \mathbb{R}^n_+. & \\
 & & & \\
(b) & \max & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \\
 & \text{s.t.} & Ax = b & \\
 & & x^T Q x \leq 9 & \text{où } Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, Q \succeq 0 \\
 & & x \in \mathbb{R}^n_+. & \\
 & & & \\
(c) & \min & c^T x & \\
 & \text{s.t.} & Ax \leq b & \text{où } A \in \mathbb{Z}^{\times n}, b \in \mathbb{Z}^n, \det(A) = 1 \\
 & & x \in \mathbb{Z}^n_+. & \\
 & & & \\
(d) & \min & \log(c^T x) & \\
 & \text{s.t.} & Ax \leq b & \\
 & & x \in \mathbb{R}^n_+. &
\end{array}
$$

Question 4. Le problème suivant

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^T x + d^T y \\
s.t. & ||x|| \leq ||y|| \\
 & x, y \in \mathbb{R}^n
\end{array}
$$

est-il convexe ?

Question 5. Résoudre géométriquement par branch-and-bound

$$
\begin{array}{lccccl}
\max & 9x_1 & + & 5x_2 & & \\
s.t. & 4x_1 & + & 9x_2 & & \leq 35 \\
 & x_1 & & & & \leq 6 \\
 & x_1 & - & 3x_2 & & \geq 1 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & & \leq 19 \\
 & & & x_1, x_2 & & \in \ \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

Question 6. Résoudre géométriquement par branch-and-bound

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & \\
s.t. & -\frac{2}{3}x_1 & + & x_2 & \leq \frac{5}{2} \\
 & \frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & \leq \frac{9}{2} \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq 14 \\
 & & & x_1, x_2 & \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

Question 7. Résoudre le problème discret

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 17x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 17x_4 \\
\text{s.t.} & & 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 7x_4 \leq 15 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Question 8. Résoudre le problème discret

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 2x_1 + 14x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\
\text{s.t.} & & x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 10 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$