# Optimisation numérique – répétition 7

## Programmation conique

3 mai 2010

---

**Question 1.** [Juin 2008]

Pour chacun des problèmes suivants, déterminez le type de problème d'optimisation dont il s'agit. Déterminez également s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Lorsque ce n'est pas indiqué, $A$ est une matrice quelconque de taille $m \times n$ et $b$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \max & |x_1 + 2x_2| \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \text{pour tout } i = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \text{pour tout } i, j. \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{ll} \max & x_1 x_2 \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{ll} \max & \frac{1}{c^T x} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

**Question 2.** [Août 2008]

Pour chacun des problèmes suivants, déterminez le type de problème d'optimisation dont il s'agit. Déterminez également s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre.

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \min & |x_1 - 3x_2| \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 2, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & \text{pour tout } i = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & \text{pour tout } i, j. \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^3 \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{ll} \min & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & (x_1 + 3x_2)^3 \leq (2x_1 + x_2)^3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

**Question 3.** [Juin 2009]

Pour chacun des problèmes suivants, déterminez le type de problème d'optimisation dont il s'agit. Déterminez également s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Dans chaque cas, **si ce n'est pas précisé autrement**, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} (a) & \min & x_1 + x_2^2 \\ & \text{s.t.} & Ax = b \\ & & x \in \mathbb{R}^n_+. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} (b) & \max & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \\ & \text{s.t.} & Ax = b & \\ & & x^T Q x \leq 9 & \text{où } Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, Q \succeq 0 \\ & & x \in \mathbb{R}^n_+. & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} (c) & \min & c^T x & \\ & \text{s.t.} & Ax \leq b & \text{où } A \in \mathbb{Z}^{\times n}, b \in \mathbb{Z}^n, \det(A) = 1 \\ & & x \in \mathbb{Z}^n_+. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (d) & \min & \log(c^T x) \\ & \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & & x \in \mathbb{R}^n_+. \end{array}$$

**Question 4.** Transformez les problèmes suivants en format conique.

$$\begin{array}{ll} \min & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ & x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 \\ & x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \end{array}$$

**Question 5.** Le problème suivant

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x + d^T y \\ s.t. & ||x|| \leq ||y|| \\ & x, y \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

est-il convexe ?

**Question 6.** Transformez le problème

$$\begin{array}{rl} \min & x^T Q x \\ s.t. & ||x||_2 \leq \gamma \end{array}$$

où Q est définie positive en un problème solvable efficacement.