Optimisation numérique – répétition 6

Analyse de sensibilité

25 mars 2011

Question 1. [Juin 2008] Soit le problème linéaire

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & + & x_3 & \geq & 1 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 0 \\
 & 3x_1 & & & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & x1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe.
2. Que devient la solution optimale si on remplace le membre de droite de la seconde inégalité par 2 ?
3. Déterminez pour quelles valeurs du coût de x_3 la base optimale reste inchangée.
4. On ajoute la contrainte $x_1 - x_2 \geq 5$ au problème initial. Calculez la nouvelle solution optimale.

Question 2. [Août 2009] On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 7x_1 & & & + & 5x_3 & & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq 9 \\
 & & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq 0 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & \geq 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

On dénote par s_1, s_2, s_3 les variables d'écart des trois inégalités (prises dans l'ordre initial). Le tableau suivant est un tableau optimal du simplexe

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\max & & & & & & & - & 2s_1 & & & - & s_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & + & \frac{5}{7}x_3 & & & + & \frac{2}{7}s_1 & & & + & \frac{1}{7}s_3 & = & 2 \\
 & & x_2 & - & \frac{1}{7}x_3 & + & 2x_4 & + & \frac{1}{7}s_1 & & & - & \frac{3}{7}s_3 & = & 3 \\
 & & & & \frac{6}{7}x_3 & + & 5x_4 & + & \frac{1}{7}s_1 & + & s_2 & - & \frac{3}{7}s_3 & = & 3 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & s_1 & , & s_2 & , s_3 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Le coefficient de l'objectif de x_4 passe de 0 à 1. Recalculer la nouvelle solution optimale. *Remarque :* Le calcul du tableau complet n'est pas demandé. Seuls les éléments nécessaires pour répondre à la question suffisent.
2. Dans le problème initial, le membre de droite de la deuxième contrainte passe de 0 à -4. Recalculer la nouvelle solution optimale.

Question 3. [Juin 2009] On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{rl} \max & 4x_1+7x_2+3x_3+\ x_4+5x_5 \\ \text{s.t.} & 2x_1+3x_2+\ x3 \qquad +3x_5 \leq 19 \\ & x_1-\ x_2 \qquad +2x_4 \qquad \geq 0 \\ & x_1+3x_2 \qquad +\ x_4+2x_5 \leq 10 \\ & x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5 \geq 0 \end{array}$$

Le tableau optimal du simplexe est le suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3	
3	5	0	0	6	3	0	1	
2	3	1	0	3	1	0	0	19
1	7	0	0	4	0	1	2	20
1	3	0	1	2	0	0	1	10

1. Le coût de la variable x_4 devient 0 au lieu de 1. Quelle est la nouvelle solution optimale ?
2. Dans le problème initial, le coefficient dans la première contrainte de x_1 passe de 2 à 0. Recalculer la nouvelle solution.
3. Dans le problème initial, on rajoute la “contrainte” que chaque variable x_i doit être bornée supérieurement par 10 ($i = 1, \ldots, 5$). Que devient la solution optimale ?
4. On voudrait savoir pour quelles valeurs du membre de droite de la deuxième contrainte du problème initial, la solution optimale reste composée de $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 = 0$.

Question 4. Une fonderie de circuits intégrés peut fabriquer 4 types de processeurs différents :

les architectures Arrandale (i3), Clarkdale (i5), Penryn (Core 2M) et Bloomfield (i7). De plus, Penryn peut être fabriqué de deux façons différentes. Les processeurs sont produits par groupes appelés *wafers*. Chacun nécessite du silicium, un temps de photolithographie, un temps de gravure (*etching*) et un temps de dopage. Les besoins en ressources et le bénéfice correspondant à chaque *wafer* est détaillé dans le tableau suivant. Les quantités de ressources disponibles sont également indiquées.

Ressource	A	C	P_1	P_2	B	Total Max.
Silicium (kg)	10	15	10	10	20	130
Photolithographie (heures)	1	2	2	1	1	13
Gravure (heures)	3	1	6	6	3	45
Dopage (heures)	2	4	2	5	3	23
Bénéfice	51	102	66	66	89	/

Le fabricant s'est actuellement engagé à produire autant de Penryn par chaque méthode. La formulation du problème de maximisation du profit est donnée ci-dessous. Les variables de décision, A, C, P_1, P_2 et B sont les quantités de *wafers* de type Arrandale, Clarkdale, Penryn méthode 1, Penryn méthode 2 et Bloomfield, respectivement. On admet pour la résolution du problème que le nombre de *wafers* n'est pas nécessairement entier.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{Max} & 51\text{A} & + & 102\text{C} & + & 66P_1 & + & 66\ P_2 & + & 89\text{B} & & \\
\text{s.t.} & 10\text{A} & + & 15\text{C} & + & 10P_1 & + & 10P_2 & + & 20\text{B} & \leq & 130 \\
 & \text{A} & + & 2\text{C} & + & 2P_1 & + & P_2 & + & \text{B} & \leq & 13 \\
 & 3\text{A} & + & \text{C} & + & 6P_1 & + & 6P_2 & + & 3\text{B} & \leq & 45 \\
 & 2\text{A} & + & 4\text{C} & + & 2P_1 & + & 5P_2 & + & 3\text{B} & \leq & 23 \\
 & & & & & P_1 & - & P_2 & & & = & 0
\end{array}$$

$$\text{A, C, } P_1,\ P_2,\ \text{B, } \geq 0.$$

La solution des problèmes primal et dual, respectivement, ainsi que les informations de sensibilité sont donnés dans les deux tables ci-dessous :

	Valeur optimale	Coût réduit	Coefficient objectif	Augmentation permise	Diminution permise
A	0	-3.571	51	3.571	∞
C	2	0	102	16.667	12.5
P_1	0	0	66	37.571	∞
P_2	0	-37.571	66	37.571	∞
B	5	0	89	47	12.5

Table 1. Solution optimale du problème primal et sa sensibilité par rapport à une modification des coefficients de la fonction objectif. Les deux dernières colonnes fournissent les changements dans les coefficients de la fonction objectif qui permettent de conserver une solution optimale.

	Variable d'écart	Variable duale	b	Augmentation permise	Diminution permise
Silicium	130	1.429	130	23.33	43.75
Photol.	9	0	13	∞	4
Gravure	17	0	45	∞	28
Dopage	23	20.143	23	5.60	3.50
$P_1 = P_2$	0	11.429	0	3.50	0

Table 2. Solution optimale du problème dual et sa sensibilité. La colonne "variables d'écart" donne les valeurs optimales des variables d'écart associées à chaque contrainte du primal. Les deux dernières colonnes fournissent les changements dans les éléments de b qui permettent de conserver la même solution du problème dual.

Utiliser ces informations pour répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la quantité optimale de chaque type processeur et quel est le bénéfice total ?
2. Pour chacune des 5 contraintes, donner une interprétation économique (pas mathématique) des variables duales optimales apparaissant dans le rapport de sensibilité.
3. Le fabricant devrait-il acheter 20kg de silicium supplémentaire à 1.1 euro le kilo ?
4. Supposons que le nombre d'heures disponibles en salle de gravure diminue de 30. Donner une borne de la diminution du bénéfice total.
5. Dans ce modèle, les quantités de Penryn méthode 1 et de Penryn méthode 2 sont égales. Considérer un modèle modifié dans lequel cette contrainte est remplacée par la contrainte $P_1 - P_2 \geq 0$. Dans le problème reformulé, est-ce que la quantité produite de Penryn méthode 1 serait positive ?

Question 5. (Sensibilité lors d'une modification dans une colonne de base de A)

Dans ce problème, on étudie comment la valeur du coût optimal est modifiée lorsque la matrice A est légèrement perturbée. On considère un problème linéaire sous forme standard et on suppose que A possède des lignes linéairement indépendantes. On suppose qu'on a une base optimale B qui permet d'obtenir une solution optimale non dégénérée x^* et une solution optimale non dégénérée duale p^*. On suppose que la première colonne fait partie de la base. On modifie alors le premier élément de A : a_{11} devient $a_{11} + \delta$, où δ est un petit scalaire.

Soit E une matrice de dimension $m \times m$ (où m est le nombre de lignes de A), dont les élèments sont tous nuls à l'exception de e_{11} qui vaut 1.

1. Montrer que, si δ est suffisamment petit, $B + \delta E$ est une matrice de base du nouveau problème.
2. Montrer qu'avec la base $B + \delta E$, le vecteur x_B des variables de base du nouveau problème est égal à $(I + \delta B^{-1}E)^{-1}B^{-1}b$.

3. Montrer que, si δ est suffisamment petit, $B + \delta E$ est une base optimale du nouveau problème.
4. Utilisons le symbole $\simeq$ pour représenter l'égalité lorsque les termes du second ordre de δ sont négligés. On sait que l'approximation suivante est vraie : $(I+\delta B^{-1}E)^{-1} \simeq I+\delta B^{-1}E$. Utiliser cette approximation pour montrer que $c'_B x_B \simeq c'x^* - \delta p_1 x_1^*$, où x_1^* (respectivement, p_1) est la première composante de la solution optimale du problème primal (respectivement, dual) et x_B est défini de la même manière qu'au point 2.

Question 6.

En résolvant un problème de programmation linéaire sous forme standard par la méthode du simplexe, on obtient le tableau suivant :

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		0	0	$\bar{c}_3$	0	$\bar{c}_5$
$x_2 =$	1	0	1	-1	0	β
$x_4 =$	2	0	0	2	1	γ
$x_1 =$	3	1	0	4	0	δ

Supposons que les trois dernières colonnes de A forment une matrice identité.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la base décrite par ce tableau soit optimale (en fonction des coefficients du tableau).
2. Supposons que la base soit optimale et que $\bar{c}_3 = 0$. Trouver une autre solution de base réalisable que celle décrite par le tableau.
3. Supposons que $\gamma > 0$. Montrer qu'il existe une solution de base réalisable optimale, quelles que soient les valeurs de $\bar{c}_3$ et $\bar{c}_5$.
4. Supposons que la base associée au tableau soit optimale. Supposons également que l'élément b_1 du problème initial soit remplacé par $b_1 + \epsilon$. Donner des bornes supérieure et inférieure sur ϵ pour que la base reste optimale.
5. Supposons que la base associée au tableau soit optimale. Supposons également que l'élément c_1 du problème initial soit remplacé par $c_1 + \epsilon$. Donner des bornes supérieure et inférieure sur ϵ pour que la base reste optimale.