Optimisation numérique – répétition 5
Dualité

16 mars 2011

Question 1. Écrivez le dual du problème

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Question 2. Soit le PL suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & 47x_1 + 93x_2 + 17x_3 - 93x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Prouvez, sans résoudre le problème, que la solution $x = (1, 1, 1, 1)$ est optimale.

Question 3. Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice vérifiant les deux propriétés suivantes :

– tous les éléments de P sont non négatifs : $p_{ij} \geq 0$ pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n$,
– la somme des éléments d'une colonne P_j de P est égale à 1 : $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ pour $j = 1, ..., n$.
Prouvez qu'il existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Py = y, \qquad y \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1. \tag{1}$$

Remarque : On peut interpréter P comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov à n états. Si $s(t)$ est l'état de la chaîne à l'instant t, p_{ij} est défini comme

$$p_{ij} = prob(s(t+1) = i | s(t) = j).$$

Soit $y(t) \in \mathbb{R}^n$ la distribution de probabilité de l'état en t,

$$y_i(t) = prob(s(t) = i),$$

alors la distribution à l'instant $t+1$ est donnée par $y(t+1) = Py(t)$. Le résultat de ce problème montre qu'une chaîne de Markov dont le nombre d'état est fini a toujours une distribution d'équilibre y.

Question 4. En résolvant le problème

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 2x_2 && (2)\\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 && (3)\\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 && (4)\\ & x_1 + x_2 + x_5 = 5 && (5) \end{aligned}$$

par la méthode du simplexe on obtient à la dernière itération le tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	8
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
1	0	0	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
0	0	1	-$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	2

Le vecteur $b = (2, 4, 5)$ de (5) change et devient égal à $b_2 = (7, 3, 0)$. Comment utiliser la solution $x^\star$ du problème (5) pour résoudre le nouveau problème ?

The dual problem

$$\begin{array}{llll}
\min c^T x & & \max & p^T b \\
\text{s.t. } a_i^T x \geq b_i & i \in M_1 & \text{s.t.} & p_i \geq 0 \quad i \in M_1 \\
a_i^T x \leq b_i & i \in M_2 & & p_i \leq 0 \quad i \in M_2 \\
a_i^T x = b_i & i \in M_3 & & p_i \text{ free} \quad i \in M_3 \\
x_j \geq 0 & j \in N_1 & & p^T A_j \leq c_j \quad j \in N_1 \\
x_j \leq 0 & j \in N_2 & & p^T A_j \geq c_j \quad j \in N_2 \\
x_j \text{ free} & j \in N_3 & & p^T A_j = c_j \quad j \in N_3
\end{array}$$

PRIMAL	minimize	maximize	DUAL
constraints	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 free	**variables**
variables	≥ 0 ≤ 0 free	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	**constraints**

Complementarity Slackness

Theorem

Let x and p be feasible solutions to the primal and the dual respectively. The vectors x and p are optimal if and only if

$$p_i(a_i^T x - b_i) = 0 \qquad \text{for all } i$$
$$(c_j - p^T A_j)x_j = 0 \qquad \text{for all } j.$$