

Optimisation numérique – répétition 4

Algorithme du simplexe

11 mars 2011

Question 1. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_1 + 2x_2 \\ \text{sous } & \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases} \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Question 2. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\begin{aligned} & \text{Min } x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{sous } & \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Question 3. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\begin{aligned} & \text{Min } x_2 - 2x_1 \\ \text{sous } & \begin{cases} 2 \leq x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq x_1 \leq x_2 + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Comparer avec les solutions obtenues graphiquement

Question 4. Résolvez le PL suivant avec l'algorithme du simplexe en utilisant la règle de pivotage de Bland. Point extrême initial : $x = (2, 2, 0)$, ensemble de contraintes actives : $I = \{3, 4, 5\}$.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 - x_3 & (1) \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} & (2) \end{array}$$

Question 5. [A.N. Janvier 2010] Soit le problème linéaire

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 7 \\ x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Déterminer une solution réalisable et le tableau du simplexe correspondant ou prouver qu'il n'en existe pas.

Question 6. [Juin 2009] On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_5 \leq 19 \\ & x_1 - x_2 + 2x_4 \geq 0 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

La solution optimale du problème est $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 0, 19, 10, 0)$. Reconstruire la tableau optimal du simplexe.

Question 7. [Août 2009]

On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 7x_1 & & + 5x_3 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 & \leq & 9 \\
 & & - x_2 + x_3 + 3x_4 & \leq 0 \\
 & -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & \geq & 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

On dénote par s_1, s_2, s_3 les variables d'écart des trois inégalités (prises dans l'ordre initial). Le tableau suivant est un tableau optimal du simplexe auquel certaines valeurs manquent

$$\begin{array}{rcll}
 \max & \square & \square & \square & \square & - 2s_1 & & - s_3 \\
 \text{s.t.} & x_1 & & + \frac{5}{7}x_3 & & + \frac{2}{7}s_1 & & + \frac{1}{7}s_3 = 2 \\
 & & x_2 & - \frac{1}{7}x_3 & + 2x_4 & + \frac{1}{7}s_1 & & - \frac{3}{7}s_3 = 3 \\
 & & & \square & + 5x_4 & \square & + s_2 & \square = \square \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 & & & & & & \geq 0
 \end{array}$$

1. (a) Reconstruire le tableau optimal complet en indiquant la valeur manquante dans chacune des boites vides. Quelle est la solution optimale que le tableau représente ?
2. (b) Déterminer un autre sommet optimal.