Université de Liège **MATH0461-1**

Optimisation numérique – répétition 4

Algorithme du simplexe

5 mars 2010

Question 1. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\text{Max } x_1 + 2x_2$$

$$\text{sous} \left\{ \begin{array}{rcrl} -3x_1 & + & 2x_2 & \leq 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq 5 \end{array} \right.$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$$

Question 2. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\text{Min } x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{sous} \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 & \geq 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \leq 10 \\ x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, 3 \end{array} \right.$$

Question 3. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\text{Min } x_2 - 2x_1$$

$$\text{sous} \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq x_1 \leq x_2 + 2 \end{array} \right.$$

Comparer avec les solutions obtenues graphiquement

Question 4. Résolvez le PL suivant avec l'algorithme du simplexe en utilisant la règle de pivotage de Bland. Point extrême initial : $x = (2, 2, 0)$, ensemble de contraintes actives : $I = \{3, 4, 5\}$.

$$\min \quad x_1 + x_2 - x_3 \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Question 5. [A.N. Janvier 2010] Soit le problème linéaire

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Déterminer une solution réalisable et le tableau du simplexe correspondant ou prouver qu'il n'en existe pas.

Question 6. [Juin 2009] On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & 4x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x3 & & & + & 3x_5 & \leq & 19 \\ & x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & & & \geq & 0 \\ & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & + & 2x_5 & \leq & 10 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

La solution optimale du problème est $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 0, 19, 10, 0)$. Reconstruire la tableau optimal du simplexe.

Question 7. [Août 2009]

On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & 7x_1 & & & + & 5x_3 & & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq 9 \\
 & & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq 0 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & \geq 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

On dénote par s_1, s_2, s_3 les variables d'écart des trois inégalités (prises dans l'ordre initial). Le tableau suivant est un tableau optimal du simplexe auquel certaines valeurs manquent

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
\max & \square & & \square & & \square & & \square & - & 2s_1 & & & - & s_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & + & \frac{5}{7}x_3 & & & + & \frac{2}{7}s_1 & & & + & \frac{1}{7}s_3 & = & 2 \\
 & & & x_2 & - & \frac{1}{7}x_3 & + & 2x_4 & + & \frac{1}{7}s_1 & & & - & \frac{3}{7}s_3 & = & 3 \\
 & & & & & \square & + & 5x_4 & & \square & + & s_2 & & \square & = & \square \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & \geq & 0
\end{array}$$

1. (a) Reconstruire le tableau optimal complet en indiquant la valeur manquante dans chacune des boites vides. Quelle est la solution optimale que le tableau représente ?
2. (b) Déterminer un autre sommet optimal.