

Optimisation numérique – répétition 3

Géométrie

3 mars 2011

Question 1. [Bertsimas, exercice 2.1] Les ensembles suivants sont-ils des polyèdres ?

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x \cos \theta + y \sin \theta \leq 1, \forall \theta \in [0, \pi/2]\}$
2. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 15 \leq 0\}$
3. L'ensemble vide.

Question 2. Les ensembles suivants sont-ils des polyèdres ? Si c'est possible, exprimez les sous forme d'inégalités (donnez les matrices A et b telles que $S = \{x \mid Ax \leq b\}$) ou sous forme standard ($S = \{x \mid x \geq 0, Ax = b\}$).

1. $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$ pour $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ donnés.
2. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1, \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\}$ pour $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$), $b_1 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$ donnés.
3. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, x^T y \leq 1 \forall y : \|y\| = 1\}$.
4. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, x^T y \leq 1 \forall y : \sum_i |y_i| = 1\}$.
5. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \|x - x_1\|\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ sont donnés.
6. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \|x - x_i\|, i = 1, \dots, K\}$, $x_0, \dots, x_K \in \mathbb{R}^n$ sont donnés.

Question 3. Soit le polyèdre

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 \leq 2, \tag{1}$$

$$x_2 + 2x_3 = 2, \tag{2}$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0, \tag{3}$$

$$x_2, x_3 \geq 0\} \tag{4}$$

Calculer une solution de base réalisable et une solution de base non réalisable.

Question 4. [Juin 2008] Soit le polyèdre $P = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} + \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1. a. Représentez graphiquement le polyèdre P .
2. b. Déterminez une fonction objectif c pour laquelle le problème $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ a une solution optimale qui n'est pas unique.
3. c. Déterminez une fonction objectif c pour laquelle le problème $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ est non borné (*unbounded*).