

Éléments du calcul des probabilités

16 janvier 2018

L'utilisation de la calculatrice est interdite.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .
 - (a) Quelle est la signification de ces paramètres ?
 - (b) Quelle est la distribution de probabilité de X ?
 - (c) Ecrire et démontrer les formules donnant la moyenne et la variance de X .
 - Bonus 1 Existe-t-il un nombre r tel que la variable aléatoire $Y = r - X$ suive aussi une loi binomiale ? Si oui, on donnera une valeur convenable pour r . Quels sont alors les paramètres de la loi binomiale suivie par Y ?
 - Bonus 2 La variable aléatoire $Z = X^2$ ne suit pas une loi binomiale mais on peut quand même en calculer la moyenne et la variance ; comment ?
-
2. (a) Sur chaque pièce d'un jeu de dominos figurent deux symboles, qui peuvent être les mêmes, pris parmi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Deux pièces ne peuvent pas être identiques.
 - i. Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ?
 - ii. Quelle est la probabilité de tirer au hasard un domino qui contient un six ?
 - (b) De combien de manières différentes peut-on faire asseoir 8 personnes sur un banc
 - i. en n'imposant aucune restriction ?
 - ii. S'il y a 4 hommes et 4 femmes, et on ne veut pas qu'il y ait 2 hommes ou 2 femmes assis de manière consécutive ?
 - iii. S'il y a 5 membres d'une même famille qui veulent s'asseoir groupés ?

3. La brasserie *Pivo* en Tchéquie vend de la bière en bacs de 24 bouteilles. À cause d'un problème technique un bac ne contient que 16 bouteilles de bière, les autres bouteilles sont des bouteilles à bière remplies d'eau... L'importateur en Belgique, n'étant pas au courant du problème technique, s'étonne du nombre de plaintes reçues concernant la présence de bouteilles remplies d'eau dans les bacs à bière. Il décide d'être plus vigilant : désormais, chaque bac sera contrôlé! Voici les deux méthodes qu'il envisage (les prélèvements se font toujours au hasard).

- La première méthode consiste à prélever sans remise 3 bouteilles d'un bac et à contrôler leur contenu. Si les trois bouteilles contiennent de la bière, le bac est accepté. Sinon, il est refusé.
- La seconde méthode consiste à prélever sans remise 5 bouteilles d'un bac et à les examiner. Si au moins une de ces bouteilles est remplie d'eau, le bac est renvoyé à la brasserie. Si ce n'est pas le cas, il est accepté.

Calculer la probabilité qu'un bac soit refusé pour chacune de ces deux méthodes. Quelle est donc la méthode la plus efficace pour l'importateur ?

4. Le diamètre (en mm) d'un trou percé dans un circuit imprimé est distribué selon une loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0,007$. Les limites de tolérance sont données comme étant 1,988 et 2,012.

- (a) Quel sera le pourcentage de trous mal faits ?
- (b) Parmi les trous mal faits, combien ont un diamètre supérieur à 2mm ? Commentez.
- (c) Quelle est la valeur maximale que peut prendre σ afin que le pourcentage de trous mal faits ne dépasse pas 1%, si le diamètre des trous suit une distribution normale de paramètres $\mu = 2$ et σ ?