

# Introduction à la Calculabilité

Interrogation du 27 octobre 2011

*Livres ouverts. Durée : 1h30.*

*Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.*

1. (a) Soit  $D$  un domaine, et  $S$  un sous-ensemble de  $D$ . Si  $S$  est non dénombrable, alors son complément ( $D \setminus S$ ) est-il
  - i. toujours dénombrable ? Justifiez.
  - ii. toujours non-dénombrable ? Justifiez.
- (b) L'union de deux langages non réguliers est-elle nécessairement un langage non régulier ? Justifiez.
2. Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux langages définis sur l'alphabet  $\{a, b\}$  tels que
  - $L_1$  est le langage  $\{a^n b^m \mid m = 0 \text{ si } n \text{ est pair et } m = 1 \text{ si } n \text{ est impair}\}$ , et
  - $L_2$  est le langage des mots qui ne contiennent aucune occurrence de  $aab$ .
  - (a) Construisez un automate fini non déterministe acceptant  $L_1 \cup L_2$ .
  - (b) Construisez un automate fini déterministe acceptant  $L_1 \cup L_2$ .
3. Soit  $L$  le langage des mots construits sur l'alphabet  $\{a, b\}$  et qui comportent exactement deux fois plus de symboles  $a$  que de symboles  $b$  (dans un ordre quelconque).
  - (a) Démontrez que  $L$  n'est pas régulier.
  - (b) Construisez un automate à pile acceptant  $L$ .
4. Construisez une grammaire hors-contexte générant le langage  $\{a^n b^m c^k \mid n + m \neq k\}$ .

*Suggestion : Utilisez la décomposition  $\{a^n b^m c^k \mid n + m \neq k\} = \{a^n b^m c^k \mid n + m < k\} \cup \{a^n b^m c^k \mid n + m > k\}$ .*