

Introduction à la Calculabilité

Interrogation du 29 octobre 2009

Livres ouverts. Durée : 1h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. Soient E_F un ensemble fini, et E_D un ensemble dénombrable. L'ensemble des paires (e, d) , où $e \in E_F$ et où $d \in E_D$, est-il un ensemble dénombrable ? Justifiez rigoureusement.
2. Soit L le langage défini par $L = L_1 \cup L_2$, où L_1 et L_2 sont tous deux définis sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, et où
 - L_1 est le langage des mots w tels que, quelles que soient les positions $i, j \in \{1, 2, \dots, |w|\}$ avec $i < j$, $w(i) = a$ et $w(j) = b$, il existe k tel que $i < k < j$ et $w(k) = c$ (autrement dit, le complément de L_1 est le langage des mots comportant au moins une occurrence de ab);
 - L_2 est le langage des mots dont la longueur est un multiple de 3.
 - (a) Construisez un automate fini non déterministe acceptant L .
 - (b) Construisez un automate fini déterministe acceptant L .

3. Soit L le langage

$$\{a^n b^m \mid \begin{cases} n = 2m \text{ si } n \text{ est pair;} \\ n < 2m \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \}.$$

Démontrez que L n'est pas régulier.

4.
 - (a) Construisez un automate à pile qui accepte le langage $\{a^n b^m \mid n < 2m\}$.
 - (b) Construisez une grammaire hors-contexte qui génère le langage $\{a^i b^j c^k \mid 2i \geq k \geq 0\}$.