

Introduction à la Calculabilité

Interrogation du 30 octobre 2008

Livres ouverts. Durée : 1h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.
 - (a) La différence¹ entre deux ensembles infinis non dénombrables est toujours soit un ensemble fini, soit un ensemble dénombrable.
 - (b) Soit L un langage. Si le complément de L est fini, alors L est régulier.
2. Soit L le langage des mots w définis sur l'alphabet $\{a, b\}$ et qui satisfont simultanément les deux conditions suivantes:
 - w appartient au langage dénoté par l'expression régulière $(bab^*)^* \cup b^*$;
 - le nombre de symboles a contenus dans w est pair.

Construisez un automate fini déterministe acceptant L en détaillant la construction des éventuels automates intermédiaires.

3. (a) Soit L_1 le langage défini par

$$L_1 = \{w \in \{c, d\}^* \mid N_c(w) < N_d(w)\},$$

où $N_\sigma(w)$ dénote le nombre de symboles σ dans le mot w . A l'aide de la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers, démontrez que L_1 n'est pas régulier.

- (b) En utilisant le résultat précédent, montrez qu'il en est de même pour le langage suivant :

$$L_2 = \{a^n w b^m \mid n, m \geq 0 \wedge w \in \{c, d\}^* \wedge N_c(w) < N_d(w)\}.$$

4. Décrivez un automate à pile qui accepte le langage hors-contexte suivant :

$$L = \{a^i b^j c^k d^\ell \mid i + \ell = j + k\}.$$

¹Si S_1 et S_2 sont deux ensembles, on définit leur différence $S_1 \setminus S_2$ par l'ensemble des éléments de S_1 non compris dans S_2 .