

Introduction à la Calculabilité

Interrogation du 9 novembre 2004

Livres ouverts. Durée : 1h30.

1. Soient les ensembles infinis $S_1 = \{a^{2n} | n \geq 0\}$ (avec a^k qui dénote k répétitions du symbole a) et $S_2 = \{b^{3n} | n \geq 0\}$. L'ensemble $S = \{(s_1, s_2) | s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ est-il dénombrable? Justifiez brièvement.
2. Soit L le langage généré par la grammaire G définie sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, dont le symbole initial est S_1 et les règles sont:

$$\begin{array}{lll} S_1 \longrightarrow aS_2 & S_2 \longrightarrow bS_1 & S_2 \longrightarrow bS_2 \\ S_2 \longrightarrow bS_3 & S_3 \longrightarrow aS_3 & S_3 \longrightarrow aS_2 \\ S_3 \longrightarrow S_1 & S_3 \longrightarrow \varepsilon & \end{array}$$

Donnez une grammaire qui génère le complément de L . Expliquez la démarche que vous avez suivie pour obtenir cette grammaire.

3. Soit L le langage des mots w définis sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, où¹ $|w|_a < |w|_b$ si $|w|_a$ est pair et où $|w|_a = |w|_b$ si $|w|_a$ est impair. Démontrez que L n'est pas régulier.
4. Soit $L = \{a^m b^n c^p d^q | n = q \text{ ou } m \leq p \text{ ou } m + n = p + q\}$.
 - Montrez que L est hors-contexte.
 - Soit $L' = \{a^p b^p c^p d^p | p > 0\}$, le langage $L'' = L \cap L'$ est-il hors-contexte? Si oui, donnez une grammaire hors-contexte qui génère L'' , sinon démontrez que L'' n'est pas hors-contexte en utilisant le théorème du gonflement pour les langages hors-contextes.

¹ $|w|_a$ dénote le nombre d'occurrences du symbole a dans w