

Introduction à la Calculabilité

Examen de Seconde Session 1999

Livres fermés.

Durée : 3 heures 30 minutes.

Sur chacune de vos feuilles d'examen, indiquez votre nom, prénom et section.

Des réponses brèves mais précises sont souhaitées.

1. Soit L le langage des mots, sur l'alphabet $\{a, b\}$, ayant abb comme facteur.
Rappel : on dit qu'un mot w est facteur d'un mot w' s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $w' = w_1 w w_2$.
 - (a) Donnez une expression régulière représentant le langage L .
 - (b) Donnez un automate fini non déterministe acceptant le langage L .
 - (c) Donnez un automate fini déterministe acceptant le langage L .
 - (d) Donnez un automate fini déterministe acceptant le complément du langage L .
2. Donnez une grammaire régulière générant le langage, sur l'alphabet $\{a, b\}$, des mots ayant un nombre pair d'occurrences de a .
3. Peut-on concevoir une notation qui permette de représenter par un mot fini chacune des fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{N} ? Justifiez votre réponse.
4. Soient Σ un alphabet fini, c une lettre n'appartenant pas à Σ et le langage $L = \{w c w^R \mid w \in \Sigma^*\}$.
Rappel : w^R est l'inverse du mot w . Par exemple : $(abc)^R = cba$.
 - (a) Le langage L est-il régulier ? Justifiez.
 - (b) Le langage L est-il hors-contexte ? Justifiez.
5. Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, Z, s, F)$ l'automate à pile où : $Q = \{s, p, q, r\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{X\}$, $F = \{r\}$ et $\Delta = \left\{ \begin{array}{l} ((s, a, \varepsilon), (s, X)), \quad ((p, b, \varepsilon), (p, X)), \quad ((q, c, X), (q, \varepsilon)), \\ ((s, \varepsilon, \varepsilon), (p, \varepsilon)), \quad ((p, \varepsilon, \varepsilon), (q, \varepsilon)), \quad ((q, \varepsilon, Z), (r, \varepsilon)) \end{array} \right\}$.
 - (a) Quel est le langage accepté par M ?
 - (b) Donnez une grammaire générant ce langage.

6. Soit f une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \in \mathbb{N} f(x+p) = f(x)$. Montrez que f est une fonction primitive récursive.

Rappel : Les fonctions de l'arithmétique élémentaire (addition, multiplication, division, reste de division et test d'égalité) sont primitives récursives.

7. Soit L_1 et L_2 deux langages hors-contextes. La relation $L_1 \subseteq L_2$ est-elle décidable ? Justifiez votre réponse.

Rappel : L étant un langage hors-contexte sur l'alphabet Σ , la relation $L = \Sigma^*$ est indécidable.

8. Soit L un langage accepté par une machine de Turing M . Est-il possible de déterminer algorithmiquement s'il existe un mot u tel que $uu \in L$? Justifiez votre réponse.

9. Donnez les définitions des classes de complexité P, NP et NP-Complet.

10. Soient L_1 et L_2 deux langages.

(a) Si $L_1 \in \text{NP}$ et $L_2 \in \text{NP}$, a-t-on $L_1 \cap L_2 \in \text{NP}$?

(b) Si $L_1 \in \text{NP-Complet}$ et $L_2 \in \text{NP-Complet}$, a-t-on $L_1 \cap L_2 \in \text{NP-Complet}$?

Justifiez vos réponses.