Introduction à la Calculabilité

Examen du 5 septembre 2012

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$ et soit L le langage des mots w construits sur l'alphabet Σ qui respectent au moins une des deux conditions suivantes:

   – w se termine par ab;

   – chaque symbole a de w est directement suivi par une occurrence du symbole b.

   (a) Construire un automate fini non déterministe acceptant L.

   (b) Construire un automate fini déterministe acceptant L.

   (c) Construire un automate fini déterministe acceptant $L \cap L'$, où L' est le langage généré par la grammaire suivante:

   $$\begin{array}{c} S \to aS \mid bS \mid cT \mid \varepsilon \\ T \to aT \mid bT \mid \varepsilon \end{array}$$

2. (a) Enoncer et démontrer un théorème du gonflement pour les langages réguliers.

   (b) Enoncer le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.

3. (a) Construire un automate à pile acceptant le langage des mots w construits sur l'alphabet $\{a, b\}$ tels que le nombre de fois où le symbole a apparaît dans w est à la fois pair et égal au nombre de fois où le symbole b apparaît dans w.

   (b) Donner les définitions des notions suivantes :

      i. transitions compatibles dans un automate à pile;

      ii. automate à pile déterministe.

4. Le problème consistant à déterminer si le langage représenté par une expression régulière est vide est-il décidable? Si oui, décrire brièvement une procédure effective résolvant le problème. Si non, le démontrer.

5. (a) Définir formellement la notion de machine de Turing ainsi que les notions suivantes s'y rapportant: configuration, dérivation de configurations, exécution, langage accepté, langage décidé.

   (b) Donner un langage qui ne peut être décidé par aucune machine de Turing, mais tel qu'il existe une machine de Turing qui l'accepte.

6. (a) Le nombre d'arrangements de k objets parmi n, c'est-à-dire le nombre de possibilités de sélectionner k objets parmi n objets discernables lorsque l'ordre dans lequel les objets sont sélectionnés revêt de l'importance, peut être calculé par la fonction suivante:

$$A(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

   La fonction $A(k, n)$ est-elle μ-récursive et/ou primitive récursive ? Justifier brièvement.

   (b) Démontrer qu'il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives.

7. Soient une machine de Turing M et q un de ses états. Démontrer par la technique de la réduction que le problème consistant à déterminer si la machine M s'arrête pour au moins un mot d'entrée sur l'état q est indécidable.
   Suggestion : utiliser le problème de l'arrêt existentiel.

8. (a) Enoncer le théorème de Cook et expliquer son rôle dans la théorie de la NP-complétude.

   (b) Dans la démonstration du théorème de Cook, quel problème encode-t-on par une formule booléenne ?