

# Introduction à la Calculabilité

Examen du 29 août 2011

*Livres fermés. Durée : 3h30.*

*Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.*

1. Un *graphe dirigé* est une paire  $G = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini (mais non vide) de sommets et où  $E$  est un ensemble d'arêtes, chacune d'entre-elles étant décrite par une paire ordonnée de sommets (on peut donc écrire  $E \subseteq V \times V$ ). L'ensemble des graphes dirigés est-il dénombrable ? Justifiez.
2. Soit  $L$  le langage des mots  $w$  construits sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$  et qui respectent *au moins l'une des deux conditions suivantes* :
  - $w$  comporte une et une seule occurrence de  $bc$ ;
  - $w$  se termine par  $a$ .
  - (a) Construisez un automate fini non déterministe acceptant  $L$ .
  - (b) Construisez un automate fini déterministe acceptant  $L$ .
3.
  - (a) Soit  $L = \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$  le langage des mots sur l'alphabet  $\{a\}$  dont la longueur est une puissance de 2. En utilisant la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers, démontrez que  $L$  n'est pas un langage régulier.
  - (b) Démontrez que si  $L_1$  et  $L_2$  sont deux langages réguliers, alors  $L_1 \cap L_2$  l'est aussi.
4. Soit  $L$  le langage suivant :
$$L = \{a^{i_1}b^{i_2}c^{i_3} \mid i_1 = i_2 \text{ ou } i_2 = i_3\}.$$
  - (a) Construisez un automate à pile acceptant  $L$ .
  - (b) Décrivez une grammaire hors-contexte générant  $L$ .
5.
  - (a) Dans quelles conditions une machine de Turing *décide-t-elle* un langage ?
  - (b) Donnez un exemple de langage qui n'est pas hors-contexte, mais qui peut être accepté par une machine de Turing.

- (c) Donnez un langage qui est accepté par une machine de Turing, mais tel qu'aucune machine de Turing ne le décide.
6. (a) Définissez le concept de *fonction primitive réursive*.
- (b) La racine carrée entière d'un nombre  $n \in \mathbb{N}$  est le plus grand  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m \leq \sqrt{n}$ . Démontrez que la fonction  $\text{RacineCarreeEntiere}(n)$ , renvoyant la racine carrée entière de  $n$ , est primitive réursive.
- Remarque* : Il n'est pas nécessaire de démontrer le caractère primitif réursif des fonctions étudiées dans le cours théorique.
- (c) Démontrez qu'il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives réursives.
7. On considère le problème consistant à déterminer, pour une machine de Turing  $M$ , s'il existe un mot d'entrée  $w$  possédant une longueur paire et tel que  $M$  s'arrête sur  $w$ . Démontrez que ce problème est indécidable.
- Suggestion* : Utilisez le problème de l'arrêt sur mot vide.
8. (a) Définissez la notion de langage NP-complet.
- (b) Un langage NP-complet est-il nécessairement décidable ? Justifiez.