Introduction à la Calculabilité

Examen du 26 août 2009

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont dénombrables ? Justifier brièvement.
   - L'ensemble des langages réguliers;
   - L'ensemble des langages non réguliers;
   - L'ensemble des langages hors-contexte;
   - L'ensemble des langages acceptés par des machines de Turing.
2. (a) Démontrer de manière inductive que tout langage accepté par un automate fini non déterministe peut être dénoté par une expression régulière.

   (b) Soient l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et L le langage des mots définis sur Σ tels que toute occurrence de ab est suivie par une occurrence de c, et tel que toute occurrence de c n'est pas suivie par une occurrence de a.

   i. Construire un automate fini déterministe acceptant L.

   ii. Construire un automate fini déterministe acceptant $L \cup \{ab\}$.
3. Soit L un langage quelconque défini sur un alphabet Σ, et soit $\sigma \notin \Sigma$. Soit L_σ le langage défini par

   $$L_\sigma = \{w \mid (\exists w' \in L)(w = w'\sigma^{|w'|})\}.$$

   Si le langage L est régulier, peut-on en déduire que le langage L_σ est également régulier ? Justifier rigoureusement en énonçant chacun des théorèmes utilisés.
4. (a) Enoncer et démontrer le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.

   (b) Décrire un automate à pile qui accepte le langage suivant :

   $$L = \{a^i b^j c^k d^\ell \mid i + \ell \leq j + k\}$$
5. Quelles relations d'inclusion existe-t-il entre les ensembles de langages acceptés par les automates finis, ceux acceptés par les automates à pile et ceux acceptés par les machines de Turing ? Pour chaque inclusion stricte, donner (sans démonstration) un langage appartenant à un des ensembles, mais pas à l'autre.

6. Soit $f(n)$ la fonction qui associe à un nombre naturel n le nombre de diviseurs premiers de n. Montrer que la fonction $f(n)$ est primitive récursive. Les prédicats premier(n) et divise(m, n), respectivement vrais si et seulement si n est un nombre premier, et si et seulement si m divise n, peuvent être supposés primitifs récursifs.

7. (a) i. Définir les notions de langages *accepté* et *décidé* par une machine de Turing.
   ii. Définir les classes de décidabilité R et RE.
   iii. Démontrer que si un langage L et son complément $\overline{L}$ sont tous deux dans RE, alors à la fois L et $\overline{L}$ sont dans R.

   (b) Le problème consistant à déterminer si les langages L_{G_1} et L_{G_2} générés par deux grammaires hors-contexte G_1 et G_2 sont les mêmes, est un problème indécidable.

   Un mot w appartient au langage L_{G_1} généré par une grammaire hors-contexte G_1 si et seulement si $L_{G_1} \cup \{w\} = L_{G_1}$.

   Peut-on en déduire que le problème de déterminer si un mot w appartient au langage généré par une grammaire hors-contexte G_1 ($w \in L_{G_1}$) est indécidable ? Justifier soigneusement.

8. (a) Définir la notion de *transformation polynomiale*.

   (b) Donner une transformation polynomiale du problème du circuit hamiltonien vers le problème du voyageur de commerce, en ayant pris soin de définir préalablement ces deux problèmes.

   (c) Définir les classes des problèmes *NP-complets* et *NP-durs*.