

Introduction à la Calculabilité

Examen du 8 septembre 2005

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. (a) Démontrez que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable.
(b) L'ensemble des langages est-il dénombrable? Qu'en est-il de l'ensemble des langages réguliers?
2. Soit L un langage défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, tel que pour tout mot appartenant à L , toute occurrence du symbole a est suivie par une occurrence du symbole d et toute occurrence du symbole c n'est pas suivie par une occurrence du symbole a .
(a) Donnez un automate fini déterministe qui accepte L^* .
(b) Donnez une grammaire régulière qui génère L^* .
3. (a) Existe-t-il des langages non-réguliers contenant un nombre fini de mots? Justifiez.
(b) Démontrez que le complément d'un langage régulier est un langage régulier.
(c) Démontrez que le langage $L = \{a^m b^n c^u \mid m, n, u \geq 0 \text{ et } m \geq n + u\}$ n'est pas régulier.
4. (a) Soit L_1 , un langage régulier et L_2 un langage hors-contexte accepté par un automate à pile dont la taille de la pile est bornée par un entier n fixé. Le langage $L_1 \cap L_2$ est-il forcément régulier? Justifiez.
(b) Soient L_1 , un langage régulier et L_2, L_3 deux langages hors-contexte. Le langage $L_4 = L_1 \cap \neg(L_2 \cup L_3)$ est-il nécessairement hors-contexte? Justifiez.
(c) Énoncez et démontrez le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.
5. (a) Définissez pour les machines de Turing les notions de *configuration*, *dérivation entre configurations*, *exécution*, *langage accepté*, *langage décidé*.
(b) Un langage décidé par une machine de Turing est-il aussi toujours accepté par une machine de Turing? Et inversement? Justifiez.
6. (a) Démontrez qu'il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives.
(b) La fonction $\text{racine}(n, m)$ avec m, n qui sont deux entiers permet de calculer la racine m -ième de n , c'est-à-dire le plus grand entier k tel que $k^m \leq n$. La fonction $\text{racine}(n, m)$ est-elle primitive récursive? Justifiez.

7. (a) Démontrez que si un langage et son complément sont tous les deux dans RE (classe des langages récursivement énumérables), alors ils sont tous les deux dans R (classe des langages décidables).
(b) Montrez au moyen de la technique de la réduction que le problème de l'égalité qui consiste à déterminer si deux machines de Turing acceptent le même langage est indécidable.
8. (a) Définissez les classes de complexité suivantes: P, NP, co-NP, PSPACE, EXP-TIME et donnez les relations qui existent entre ces différentes classes.
(b) Existe-t-il des problèmes dont on est certain qu'ils ne peuvent être résolus par un algorithme polynomial? Justifiez.