Introduction à la Calculabilité

Examen de janvier 1999

Livres fermés.
Durée : 3 heures 30 minutes.

Sur chacune de vos feuilles d'examen, indiquez votre nom, prénom et section.
Des réponses brèves mais précises sont souhaitées.

1. Soit L le langage sur l'alphabet $\{a, b\}$ décrit par l'expression régulière $(ab)^*(bab \cup b)$.
   (a) Donnez un automate fini non déterministe acceptant le langage L.
   (b) Donnez une grammaire régulière générant le langage L.
   (c) Donnez un automate fini déterministe acceptant le langage L.
   (d) Donnez un automate fini déterministe acceptant le complémentaire de L.

2. Soient E_1 et E_2 deux ensembles dénombrables. Montrez que l'ensemble $E_1 \times E_2 = \{(x, y) \mid x \in E_1 \text{ et } y \in E_2\}$ est dénombrable. En déduire que l'ensemble $E = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{N} \text{ et } x + y \text{ est impair}\}$ est dénombrable.

3. Énoncez un théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.

4. Décrivez un automate à pile acceptant le langage $L = \{a^n b^m \mid n > m\}$. Le langage L^* est-il hors-contexte ? Si oui, décrivez un automate à pile l'acceptant. Si non, justifiez.

5. Fonctions primitives récursives.

   (a) Soit $q(x, y)$ un prédicat primitif récursif sur $\mathbb{N}^2$. Montrez que la fonction suivante (*maximisation bornée*) est primitive récursive :

   $$\nu i \leq m\ q(x, i) = \begin{cases} \text{le plus grand } i \leq m \text{ tel que } q(x, i) = 1 \\ 0 \text{ s'il n'existe pas de tel } i \end{cases}$$

   (b) La fonction primitive récursive $pair(x, y) = 2^x 3^y$ permet de représenter de façon univoque une paire d'entiers par un seul nombre. Nous nous intéressons à ses deux fonctions inverses. Construisez deux fonctions primitives récursives *first* et *second* telles que pour $n = 2^x 3^y$, $first(n) = x$ et $second(n) = y$; la valeur de ces fonctions pour un argument n'étant pas de la forme $2^x 3^y$ pourra être quelconque. Outre les fonctions arithmétiques classiques, on pourra utiliser la fonction suivante qui est primitive récursive

$$divise(x, y) = 1 \text{ si } x \text{ divise } y \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

6. Décrivez une machine de Turing qui supprime le premier caractère de son argument, c'est-à-dire qui partant d'une configuration initiale (s, ε, xw) où s est l'état initial, $x \in \{a, b\}$ et $w \in \{a, b\}^*$ (la tête de lecture est alors au début du ruban) s'arrête dans une configuration (q, w, ε) où q est un état accepteur (la tête de lecture est alors à la fin du mot w).

7. Soit v et z deux mots. On dit que v est un facteur de z s'il existe deux autres mots, éventuellement vides, x et y tels que $z = xvy$. Soient L un langage accepté par une machine de Turing M et v un mot. Le problème P consiste à déterminer s'il existe un mot de L dont v soit un facteur.

   (a) Montrez que $P \notin R$.
   Sugestion : utiliser le fait que le problème consistant à déterminer si le langage accepté par une machine de turing est vide est indécidable.

   (b) Montrez que $P \in RE$.

8. Donnez les définitions des classes de complexité P, NP et NP-Complet.

9. Montrez que le problème de la *Clique* décrit ci-dessous est NP-Complet.

   Données :

   – Un graphe $G = (V, E)$ où V est son ensemble de sommets et $E \subseteq V \times V$ l'ensemble de ses arcs.
   – Une constante $J \in \mathbb{N}$.

   Problème : G contient-il une *clique* de taille J ou plus, c'est-à-dire, un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $|V'| \geq J$ et tel que tout couple de sommet dans V' est relié par un arc dans E ?

   Suggestion : Faire une réduction à partir du problème de la couverture (VC) et considérer le graphe $G' = (V, \bar{E})$ où $\bar{E}$ est le complémentaire de E. Rappel, le problème de la couverture est le suivant. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier K, existe-t-il un sous ensemble $V' \subseteq V$ tel que $|V'| \leq K$ et pour tout arc $(x, y) \in E$, x ou y appartienne à V'.