Introduction à la Calculabilité

Examen du 8 janvier 2010

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. (a) Donner une expression régulière dénotant le langage des mots construits sur l'alphabet $\{a, b\}$ et qui, soit sont composés d'une seule lettre, soit contiennent exactement une occurrence de ab.

   (b) L'ensemble de mots représenté par cette expression régulière est-il dénombrable ? Justifier.

2. Soit L le langage des mots construits sur l'alphabet $\{a, b\}$ et qui contiennent un nombre impair d'occurrences de aa.

   (a) Construire un automate fini non déterministe acceptant L.

   (b) Construire un automate fini déterministe acceptant L.

   Remarque : Le mot aaa contient deux occurrences de aa.

3. (a) A l'aide de la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers, démontrer que le langage $\{a^{3n}b^nc^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

   (b) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers définis sur le même alphabet Σ. Le langage $L_1 \oplus L_2$ des mots n'appartenant qu'à un seul des deux langages L_1 et L_2 est-il toujours un langage régulier ? Justifier soigneusement.

4. (a) Démontrer qu'il existe un algorithme pour déterminer, étant donné une grammaire hors-contexte G et un mot w, si le mot w appartient au langage généré par la grammaire G.

   (b) Construire un automate à pile acceptant le langage $\{a^ib^jc^k \mid j \geq i + k\}$.

5. (a) Définir la notion de mot accepté par une machine de Turing, en ayant pris soin de préalablement décrire formellement les notions de machine de Turing, configuration et dérivation de configurations.

   (b) En quoi consiste la thèse de Turing-Church ? De quelles manières peut-on la justifier ? Expliquer brièvement.

6. (a) La fonction nbfact(n, f), où n est un nombre naturel et f un nombre premier, renvoie la multiplicité de f dans la décomposition en facteurs premiers de n. Montrer que cette fonction est primitive récursive.
   Exemple : $\text{nbfact}(18, 3) = 2$ car $18 = 2.\underbrace{3.3}_{2}$. Par contre, $\text{nbfact}(18, 5) = 0$ car 5 n'est pas un facteur premier de 18.
   Remarque : Il n'est pas nécessaire de démontrer le caractère primitif récursif des fonctions étudiées dans le cours théorique.

   (b) Démontrer qu'il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives.

7. Soient M_1 et M_2 deux machines de Turing acceptant respectivement les langages L_1 et L_2. Démontrer que le problème consistant à déterminer s'il existe un mot $w \in L_1$ tel que M_2 s'arrête sur w est indécidable.
   Suggestion: utiliser le problème de l'arrêt ou une de ses variantes.

8. (a) Quand dit-on que deux langages sont *polynomialement équivalents* ?

   (b) Sous quelle hypothèse serait-il possible de trouver deux langages L_1 et L_2 ayant les propriétés d'être polynomialement équivalents et tels que $L_1 \in NPC$ et $L_2 \in P$? Cette hypothèse est-elle vraisemblable ? Justifier.

   (c) Dans la démonstration du théorème de Cook, une formule est construite et une borne sur la taille de cette formule est donnée.

      i. Quelle est cette borne et de quel(s) paramètre(s) dépend-elle ?

      ii. Pourquoi cette borne est-elle indispensable dans la démonstration ?