Introduction à la Calculabilité

Examen du 10 janvier 2008

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. (a) L'ensemble des programmes écrits dans un langage de programmation usuel est-il dénombrable ? Justifier brièvement.

   (b) A l'aide de la technique de la diagonale, montrer que l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

2. Soit L le langage des mots définis sur l'alphabet $\{a, b\}$, et dont le nombre de a est pair ou qui contiennent un nombre de b strictement inférieur à 2.

   (a) Construire un automate fini non déterministe acceptant L.

   (b) Construire un automate fini déterministe acceptant L.

   (c) Donner une grammaire régulière générant L.

3. (a) Soit L le langage des mots définis sur l'alphabet $\{a, b, c\}$, et dont le nombre de a est égal à la division entière du nombre de b par le nombre de c. Démontrer que L n'est pas régulier.

   (b) Donner un algorithme, basé sur la théorie des automates finis, permettant de trouver dans une chaîne de caractères w toutes les instances d'une expression régulière α.

4. (a) Démontrer que l'intersection entre deux langages hors-contexte n'est pas toujours hors contexte. En déduire que le complément d'un langage hors-contexte n'est pas toujours hors-contexte.

   (b) Donner un algorithme, se terminant toujours, qui détermine si un langage généré par une grammaire hors-contexte est vide ou non.

5. (a) Construire une machine de Turing dont l'alphabet d'entrée est $\{a, b, c\}$ et qui, pour chaque symbole a sur son ruban d'entrée, remplace le symbole qui le précède directement (s'il existe) par un symbole b. Expliciter en quelques mots le rôle de chaque état de la machine construite.

   (b) Démontrer que tout langage accepté par une machine de Turing non déterministe l'est aussi par une machine de Turing déterministe.

6. (a) Montrer que le prédicat premier(x), vrai si et seulement si x est un nombre premier, est primitif récursif. Pour rappel, un nombre naturel est premier s'il n'admet aucun autre diviseur que 1 et lui-même, à l'exception de 1 qui n'est pas considéré comme premier.
   (b) Donner la définition des fonctions μ-récursives.
7. (a) Démontrer par la technique de la réduction que le problème consistant à déterminer si l'intersection des langages acceptés par deux machines de Turing M_1 et M_2 est vide, est indécidable.
   Suggestion : réduction à partir du problème du langage accepté vide.
   (b) Comment peuvent se situer un langage L et son complément $\overline{L}$ vis-à-vis des classes R et RE ? Justifier.
8. (a) Définir les notions de transformation polynomiale et de langages polynomialement équivalents.
   (b) Dans la démonstration du théorème de Cook, une formule du calcul des propositions est construite.
      i. De quels éléments cette formule dépend-elle ?
      ii. Quand est-elle satisfaisable ?
      iii. En fonction de quel élément établit-on son caractère polynomial ?
   (c) Quelle est la différence entre un problème NP-complet et un problème NP-dur ? Comment pourrait-on démontrer qu'un problème est NP-dur ?