

# Introduction à la Calculabilité

Examen du 15 janvier 2007

*Livres fermés. Durée : 3h30.*

*Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.*

1. (a) Démontrez que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble infini dénombrable n'est pas dénombrable.  
(b) Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez brièvement.
  - Tout sous-ensemble infini d'un ensemble infini dénombrable est dénombrable.
  - Tout sous-ensemble infini d'un ensemble infini non-dénombrable n'est pas dénombrable.
  - L'union de deux ensembles infinis dénombrables est un ensemble dénombrable.
2. Soit le langage  $L$  défini sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  par l'expression régulière suivante :

$$[c^+(a^*b \cup (ba)^*)]^*$$

- (a) Construisez un automate fini non-déterministe qui accepte  $L$ .
- (b) Construisez un automate fini déterministe qui accepte  $L$ .
- (c) Donnez une grammaire régulière qui génère le complément de  $L$ .
3. (a) Démontrez que le langage  $L = \{a^kcb^{3k} \mid k \geq 0\}$  défini sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  n'est pas régulier en utilisant la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers.  
(b) Donnez une grammaire hors-contexte qui génère  $L$ .
4. (a) Énoncez le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.  
(b) Démontrez que le langage  $L = \{a^n b^m c^n \mid m < n \text{ et } m \geq 0\}$  défini sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  n'est pas hors-contexte en utilisant le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.

5. (a) Définissez pour les machines de Turing les notions de *configuration*, *dérivation entre configurations*, *exécution*, *langage accepté*, *langage décidé*.  
(b) Donnez une machine de Turing qui décide le langage  $L = \{a^n b^{2^n} c^n \mid n \geq 0\}$  défini sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Explicitez en quelques mots le rôle de chaque état de la machine construite.
6. (a) Montrez qu'il existe une représentation effective des chaînes de caractères par les nombres naturels.  
(b) Soit  $\text{mult}(x, n)$  un prédicat qui est vrai si et seulement si  $x$  est un multiple de  $n$ , avec  $x$  et  $n$  deux entiers. Le prédicat  $\text{mult}$  est-il primitif récursif? Justifiez.
7. (a) Le problème de déterminer si le langage généré par une grammaire est récursif est-il décidable? Justifiez brièvement.  
(b) Démontrez qu'un langage est accepté par une machine de Turing si et seulement si il peut être énuméré par une procédure effective.
8. (a) Définissez la notion de transformation polynomiale.  
(b) Définissez les problèmes du voyageur de commerce et du circuit hamiltonien et donnez une transformation polynomiale du problème du circuit hamiltonien vers le problème du voyageur de commerce.  
(c) Énoncez le théorème de Cook.  
(d) Donnez un algorithme déterministe qui résout le problème SAT. Quelle est sa complexité?