Introduction à la Calculabilité

Examen du 16 janvier 2006

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. (a) Démontrez que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable.

   (b) Supposons que l'on étende la définition des langages réguliers en y ajoutant, outre les opérations d'union de concaténation et de fermeture itérative, l'opération $L = L_1^n L_2^n$ qui génère l'ensemble des mots obtenus en concaténant n occurrences de mots du langage L_1 et n occurrences de mots de L_2.

      i. La famille de langages ainsi obtenue coïncide-t-elle avec celle des langages réguliers ? Justifiez brièvement.

      ii. Cette famille de langages forme-t-elle un ensemble dénombrable ? Justifiez brièvement.

2. (a) Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et L le langage des mots définis sur Σ et qui comportent au moins deux occurrences de b (pas nécessairement consécutives) ou qui se terminent par ab. Donnez

      i. un automate nondéterministe qui accepte L ;

      ii. un automate déterministe qui accepte L ;

      iii. une grammaire régulière qui génère le complément de L.

   (b) Soient A_1 et A_2, deux automates finis. Décrivez une procédure qui permet de tester si $L(A_1) \subseteq L(A_2)$.

3. (a) Démontrez que le langage $L = \{a^m b^n | m \neq n\}$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ n'est pas régulier.

   (b) Enoncez le théorème du gonflement pour les langages hors-contextes.

4. Soit L un langage hors-contexte défini sur un alphabet Σ.

   (a) Montrez qu'il existe un algorithme qui permet de déterminer si L est vide.

   (b) Soient L' et L'' deux langages réguliers définis sur le même alphabet Σ que L. Le langage $(\neg L \cup L') \cap L''$, est-il nécessairement hors-contexte ? Justifiez.

5. (a) Soit une machine comprenant une mémoire RAM et un certain nombre de registres, dont un compteur de programme. Donnez les grand principes d'une construction permettant de simuler cette machine au moyen d'une machine de Turing. Aucune démonstration n'est demandée.

(b) Donnez un exemple de langage qui peut être décidé par une machine de Turing, mais qui ne peut être accepté par un automate à pile. Justifiez brièvement.

(c) Donnez un exemple de langage qui peut être accepté, mais non décidé par une machine de Turing.

6. (a) Montrez qu'il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récursives.

   (b) Soit $f(x, k) = x^0 + x^1 + \ldots + x^k$ une fonction à deux arguments définie sur les nombres naturels. Cette fonction est-elle primitive récursive ? Justifiez.

7. (a) Démontrez que le langage $L = \{w | w = w_i \wedge M_i$ n'accepte pas $w\}$ construit à partir d'une énumération des mots et des machines de Turing, n'est pas dans la classe **RE**.

   (b) Expliquez le principe d'une démonstration d'indécidabilité par réduction. Illustrez ce principe en démontrant l'indécidabilité du problème de l'arrêt sur ruban vide.

8. (a) Les problèmes de la classe NP sont-ils décidables ? Justifiez brièvement.

   (b) Définissez les concepts de transformation polynomiale et de classe d'équivalence polynomiale.

   (c) Enoncez le théorème de Cook.

   (d) Dans la démonstration du théorème de Cook, pourquoi peut-on supposer que les exécutions de la machine de Turing et la partie de ruban employée sont bornées par un polynôme $p(n)$?

   (e) Le problème $3SAT$ est le problème de la satisfaisabilité des formules en forme normale conjonctive comportant exactement 3 littéraux par clause. Montrez que $3SAT$ est NP-complet.