Introduction à la Calculabilité

Examen du 28 janvier 2005

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. (a) Tout sous-ensemble infini d'un ensemble non dénombrable est-il nécessairement non dénombrable? Justifiez.

   (b) Démontrez par un argument de cardinalité qu'il existe des problèmes qui ne sont pas solubles au moyen d'une procédure effective. On ne demande pas la démonstration des résultats intermédiaires qui seraient utilisés.

2. Soit le langage L défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$, et dénoté par l'expression régulière suivante:

$$a^*bc^*b \cup bd^*.$$

   (a) Donnez une grammaire régulière qui génère le complément du langage L.

   (b) Donnez une expression régulière qui dénote le complément du langage L.

3. (a) Démontrez le deuxième théorème du gonflement pour les langages réguliers.

   (b) Démontrez que le langage $L = \{a^m b^n c^q | m, n, q \geq 0 \text{ et } m > n \text{ et } n > q\}$ n'est pas régulier.

   (c) Une union infinie de langages hors-contextes est-elle toujours un langage hors-contexte? Justifiez.

4. (a) L'intersection de deux langages hors-contextes est-elle toujours un langage hors-contexte? Justifiez.

   (b) Démontrez que l'intersection d'un langage hors-contexte avec un langage régulier est toujours un langage hors-contexte.

5. (a) Donnez la définition des machines de Turing non-déterministes et démontrez que tout langage accepté par une machine de Turing non déterministe est aussi accepté par une machine de Turing déterministe.

   (b) Un automate à deux piles est un septuplet $M = (Q, \Sigma, \Delta, \Gamma, Z, s, F)$, où Q est un ensemble fini d'états, Σ un alphabet d'entrée, Γ est un alphabet commun aux deux piles, Z un symbole initial de pile et F est l'ensemble des états accepteurs. Une configuration de M est un quadruplet (q, w, α, β), où q est l'état courant de M, w est le mot qu'il faut encore lire, α est le contenu de la première pile et β le contenu de la seconde.

On définis la relation de transition de M par $\delta \subseteq ((Q \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^*), (Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*))$. Une configuration $(q', w', \alpha_1', \alpha_2')$ est dérivable en une étape d'une configuration $(q, w, \alpha_1, \alpha_2)$ par la transition $(q, u, \beta_1, \beta_2), (q', \gamma_1, \gamma_2)$ ssi $w = uw'$, $\alpha_1 = \beta_1 \delta_1$,$\alpha_1' = \gamma_1 \delta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 \delta_2$ et $\alpha_2' = \gamma_2 \delta_2$.
Montrez que le langage $L = \{a^n b^n c^n\}$ peut être accepté par un automate à deux piles.

6. (a) Définissez les notions de fonction primitive récursive, prédicat, prédicat sûr, fonction $\mu-$récursive, fonction calculable.

   (b) Soit $f(x, y)$ une fonction qui prend en argument deux entiers positifs et qui calcul le quotient entier de x par y. La fonction f est-elle primitive récursive? Justifiez.

7. (a) Démontrez qu'un langage est calculé par une machine de Turing si et seulement si il est récursivement énumérable.

   (b) Etant donné une fonction primitive récursive $f(x_1, \ldots, x_n)$ et une valeur a, démontrez que déterminer s'il existe des valeurs des arguments $x_1, \ldots, x_n$ tel que $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ est indécidable.
   Suggestion: effectuer une réduction à partir du problème de l'arrêt.

8. (a) Enoncez le théorème de Cook.

   (b) Démontrez que les langages qui appartiennent à la classe de complexité NP sont décidables.

   (c) Les langages appartenants à la classe de complexité co-NP sont-ils décidables? Justifiez.

   (d) Soient L_1 et L_2 deux langages appartenant à la classe P. Que peut-on dire sur la complexité du langage $L_1 \cdot L_2$?