

# Introduction à la Calculabilité

Examen de janvier 2001

*Livres fermés.*

*Durée : 3 heures 30 minutes.*

*Sur chacune de vos feuilles d'examen, indiquez votre nom, prénom et section.*

*Des réponses brèves mais précises sont souhaitées.*

1. Montrez que l'ensemble des fonctions de l'ensemble  $\mathbb{N}$  des naturels vers l'ensemble  $\{0,1\}$  n'est pas dénombrable.
2. Soit  $L$ , un langage défini sur l'alphabet  $\{a, b, c\}$ .  $L$  se compose de tous les mots respectant les contraintes suivantes :
  - contenir au moins un  $a$  ou deux  $b$ ,
  - pour toute occurrence de  $c$ , la partie du mot qui **suit** cette occurrence doit contenir au moins un  $a$  (exemple :  $abcccba$ ),
  - pour toute occurrence de  $b$ , la partie du mot qui **précède** cette occurrence doit contenir au moins un  $a$  (exemple :  $cacabcbb$ ).
  - (a) Donnez un automate fini déterministe correspondant à chacune des contraintes.
  - (b) Construisez un automate fini non déterministe acceptant le complément de  $L$ .
  - (c) Construisez un automate fini déterministe acceptant le langage  $L$ .
3.
  - (a) Énoncez les théorèmes du gonflement pour les langages réguliers.
  - (b) Le langage  $L = \{a^n b^m : m \text{ divise } n\}$ , est-il régulier ? Justifiez.
4. *Langages hors-contexte*
  - (a) Donnez une grammaire hors-contexte générant le langage  $\{a^p b^q a^r \mid p + r = q\}$ .
  - (b) Démontrez qu'étant donné une grammaire hors-contexte  $G$ , il existe un algorithme pour déterminer si un mot donné appartient à  $L(G)$ .
5. Soit la fonction  $PGPuissance(x, y)$  qui renvoie le plus grand nombre qui divise  $x$  et qui est une puissance de  $y$  lorsque  $x, y > 1$ , et, qui renvoie 0 dans les autres cas.  
Exemples :  $PGPuissance(20, 2) = 4$  ;  $PGPuissance(20, 3) = 1$ .  
Montrez que la fonction  $PGPuissance(x, y)$  est primitive réursive.
6. (a) Construisez une machine de Turing calculant la fonction  $f(x) = 3x$ . La configuration initiale est  $(s_0, \epsilon, 0 \underbrace{1..1}_x 0### \dots)$  et la configuration finale doit être  $(s_f, \epsilon, 0 \underbrace{1..1}_{3x} 0### \dots)$   
*Veillez à décrire le comportement de la machine en français et sous forme de diagramme, ainsi qu'à limiter le nombre d'états.*

- (b) Définissez la notion de *complexité en temps* d'une machine de Turing déterministe.
- (c) Donnez la complexité en temps de la machine de Turing construite en (a) à l'aide de la notation  $O$ .

7. *La non-calculabilité*

- (a) Démontrez que si un langage  $L$  et son complément  $\bar{L}$  sont tous deux dans RE, alors à la fois  $L$  et  $\bar{L}$  sont dans R.
- (b) Montrez que le problème de déterminer si le langage accepté par une machine de Turing est fini est indécidable.

8. *Théorème de Cook*

- (a) Définissez le problème SAT.
- (b) Donnez un algorithme résolvant le problème SAT. Quelle est sa complexité ?
- (c) Décrivez en quelques lignes le principe de la démonstration du théorème de Cook.
- (d) Expliquez quelles sont les variables utilisées dans la formule de SAT produite par la transformation utilisée dans la démonstration du théorème de Cook et décrivez leur rôle.
- (e) Décrivez la formule booléenne correspondant à la condition exprimant que le contenu de ruban est modifié en concordance avec la relation de transition.