Cours de théorie de l'information et du codage
Questions pour l'examen oral - janvier 2008

Chapitre 8

1. Définir la convergence en probabilité, formuler le théorème AEP. Donner le principe de la démonstration du théorème AEP, puis la démonstration elle-même. Définir la notion d'ensemble de messages typiques $A_\epsilon^{(n)}$, donner 4 propriétés. Messages représentatifs versus typiques : discuter le cas général, et le cas particulier où plusieurs symboles émis par la source sont équiprobables. Expliquer la relation entre messages typiques et compression de données.

2. Définir la notion de processus stationnaire. Définir la convergence presque sûre et la notion de processus stationnaire et ergodique. Donner les 2 définitions de l'entropie d'une source discrète stationnaire $H(S)$ et $H'(S)$. L'existence de $H'(S)$ implique celle de $H(S)$: donner le principe de la démonstration, puis la démonstration elle-même. Montrer pourquoi $H'(S)$ existe pour toute source stationnaire. Expliquer la relation entre entropie de source et codage de source.

3. Définir la notion de chaîne de Markov et de chaîne de Markov invariante dans le temps. Expliquer comment caractériser par $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{\Pi})$ et représenter par un graphe orienté une chaîne de Markov invariante dans le temps. Définir états communicants, états périodiques, états récurrents; chaîne de Markov irréductible, apériodique, récurrente. Définir les notions de régime permanent et de distribution stationnaire. Donner et établir l'équation entre $\boldsymbol{p}$ et $\mathbf{\Pi}$ si $\boldsymbol{p}$ est une distribution stationnaire. Définir la notion d'extension de source S^k. Définir la source de Markov de mémoire $m \geq 0$ finie ; montrer comment celle-ci peut se ramener à une source de Markov (de mémoire 1).

4. Donner le but du codage de source. Définir les notions de codes régulier, déchiffrables, sans préfixe, instantané; discuter la relation entre ces propriétés. Donner l'inégalité de Kraft et expliquer son

utilité. Définir la notion de code complet. Définir le code de Shannon et montrer qu'il satisfait à l'inégalité de Kraft.

5. Exprimer la longueur moyenne des mots nécessaires au codage déchiffrable d'une source stationnaire sans mémoire ; en donner une borne inférieure et le principe de démonstration pour établir cette borne. Donner une borne supérieure (sans recourir à l'extension de source) et le principe de démonstration pour établir cette borne. Définir la notion d'extension de source. Enoncer le premier théorème de Shannon et donner le principe de la démonstration.

6. Expliquer les notions d'arbres complets et incomplets, et quel type de code ils permettent de représenter. Expliquer le rapport avec l'inégalité de Kraft. Expliquer la notion de probabilité d'un noeud d'un arbres de code. Donner les trois propriétés que doit satisfaire tout code optimal instantané (de longueur moyenne minimale); expliquer le bien-fondé de ces propriétés. Expliquer la méthode de construction d'un code optimal de Huffman.

Chapitre 9

1. Définir les notions de canal discret, canal causal, canal causal sans mémoire, canal discret sans mémoire stationnaire. Donner la définition de la capacité en information par symbole du canal sans mémoire; expliquer pourquoi la capacité ne dépend que des propriétés du canal. Présenter l'exemple du canal symétrique binaire, et calculer sa capacité en fonction de p, la probabilité d'erreur de transmission. Définir la notion de canal symétrique.

2. Définir la notion de code (M, n) pour un canal $(\mathcal{X}, P(\mathcal{Y}|\mathcal{X}), \mathcal{Y})$. Expliquer les règles de décodage suivantes : la règle du maximum de probabilité a posteriori (règle de Bayes) et son inconvénient en pratique, et la règle du maximum de vraisemblance. Définir le taux (ou débit) de communication R d'un code (M, n), la notion de débit réalisable, la notion de capacité opérationnelle. Rappeler la définition de la capacité en information par symbole. Enoncer le second théorème de Shannon.

3. Expliquer la notion de séquences conjointement typiques. Rappeler les notions de débit réalisable et de capacité en information d'un canal. Expliquer la notion de codes aléatoires. Enoncer le second théorème de Shannon. Présenter les grands principes de la démonstration.

Chapitre 10

1. Donner la relation entrée-sortie du canal continu gaussien. Donner la condition de limitation de puissance sur les symboles d'entrée dans le cas général et dans le cas de signaux d'entrée ergodiques. Expliquer comment exploiter le canal gaussien limité en puissance en le convertissant en un canal discret (par exemple en canal binaire symétrique); donner avantages et inconvénients de ce mode d'utilisation du canal. Définir la capacité en information du canal gaussien limité en puissance. Donner sa valeur pour une limitation de puissance à P et une variance du bruit N.

2. Donner la relation entrée-sortie du canal continu à bande passante limitée et bruit blanc gaussien. Définir le bruit blanc gaussien en temps continu et à bande limitée (fréquence f_0). Dire à quels instants il est nécessaire d'échantillonner le signal pour pouvoir le reconstruire. Donner la capacité de ce canal mesurée en bits par échantillon puis en bits par seconde. Discuter l'effet de la largeur de bande sur la capacité en bits par seconde.

Chapitre 15

1. Discuter les trois modes d'utilisation du canal gaussien suivants: full analogique, semi analogique, full numérique. Expliquer comment choisir le codage de canal selon le rapport signal/bruit.