

# Devoir : compressive sensing

---

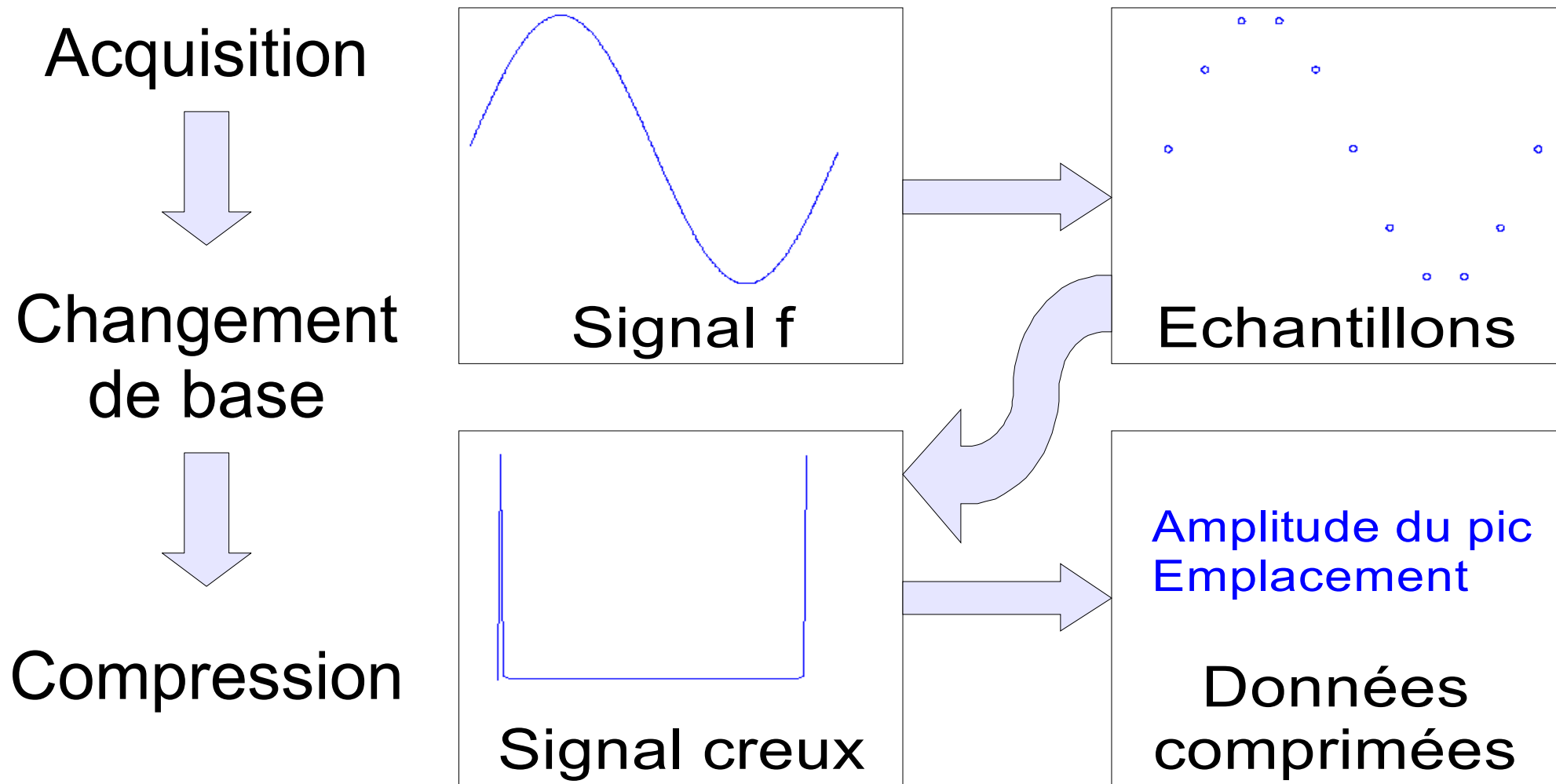
- Groupes de 2 personnes
  - Énoncé bientôt sur le web
  - Envoyer la composition des groupes à [fschnitzler@ulg.ac.be](mailto:fschnitzler@ulg.ac.be)
-

# Plan

---

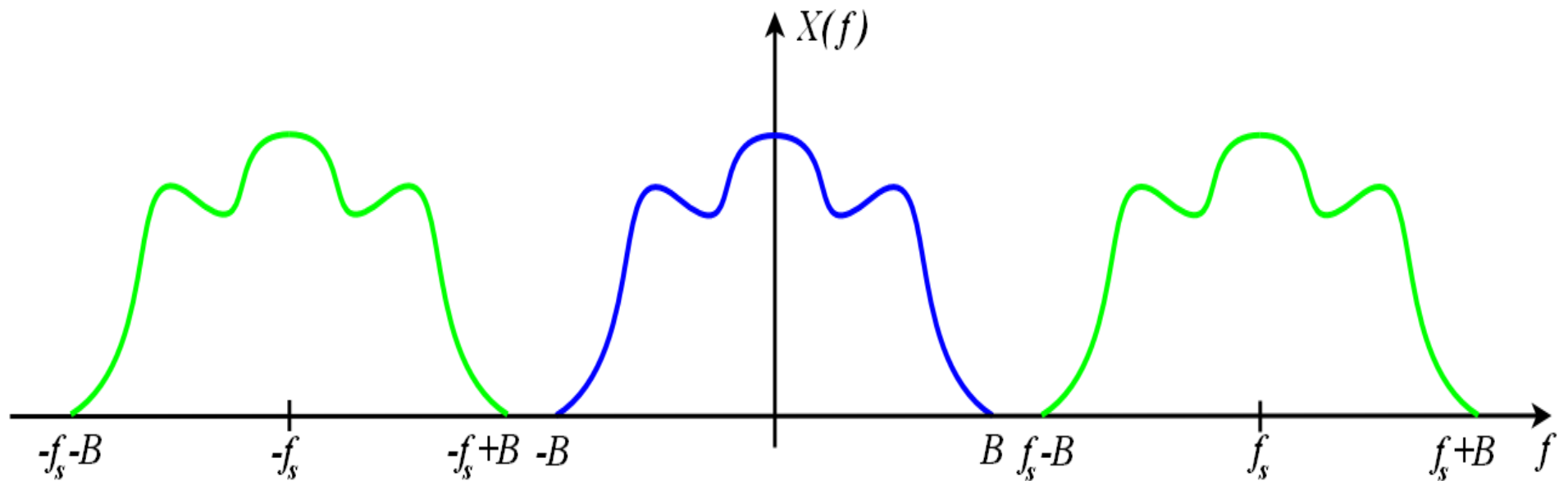
- Acquisition classique
  - Compressive sensing
    - Principe
    - Reconstruction
    - Robustesse
    - Applications
-

# Schéma classique d'acquisition

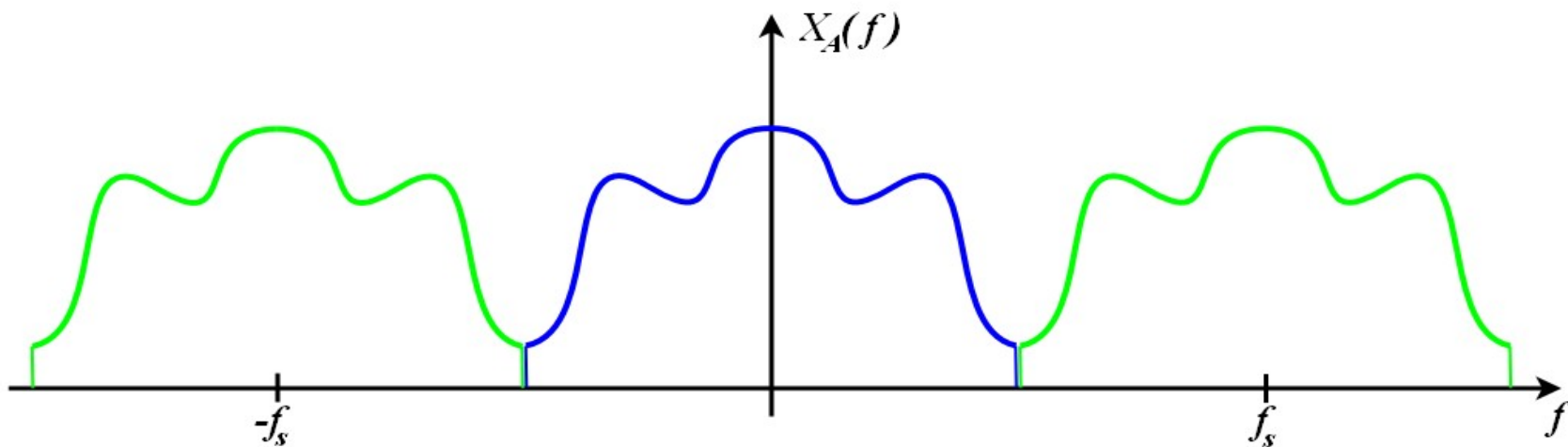
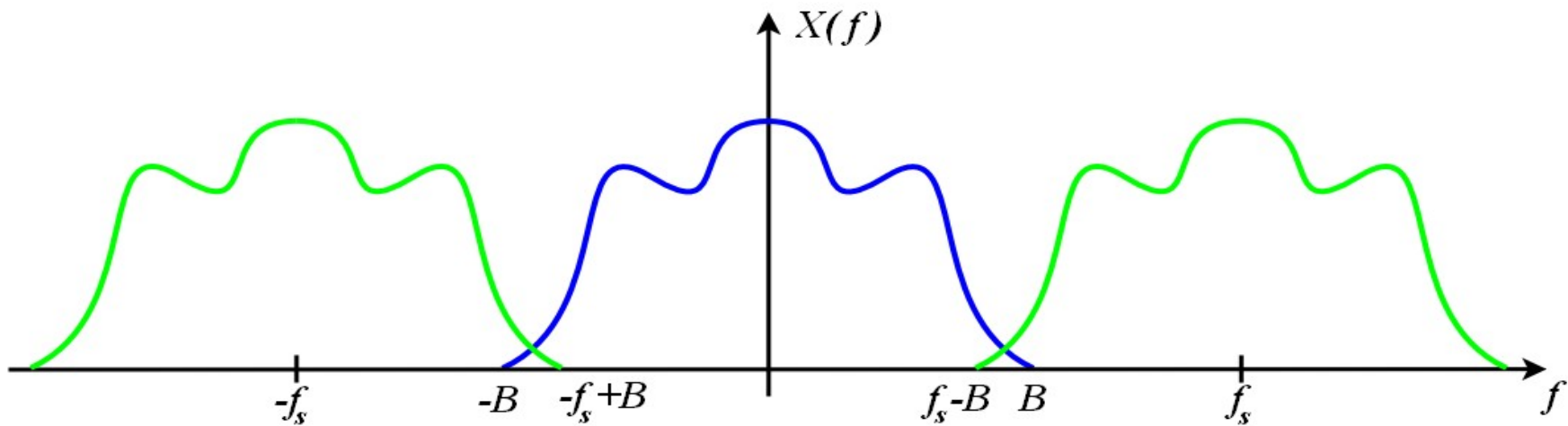


# Théorème de Shannon-Nyquist

La fréquence d'échantillonnage ( $f_s$ ) doit être 2 fois plus grande que la largeur de bande ( $B$ )



# Théorème de Shannon-Nyquist



# Changement de base

- But : exprimer  $f$  sous une forme creuse
- Projeter  $f$  sur les vecteurs de la base
- Exemples : Fourier, ondelettes, cosinus...

$$x = \Psi^*(n \times n) f$$

$$x_i = \langle f, \Psi_i \rangle$$

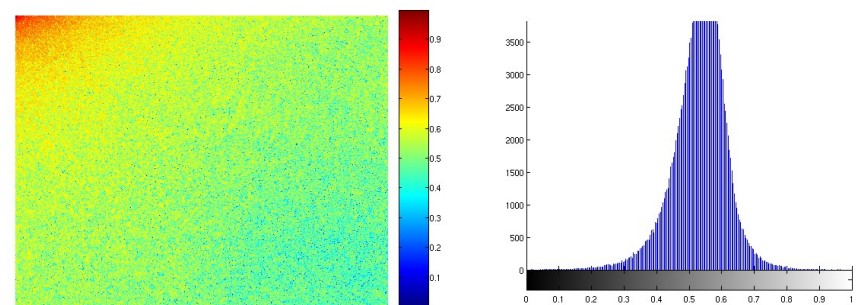
$$f = \sum_{i=1}^n x_i \Psi_i$$

# Compression

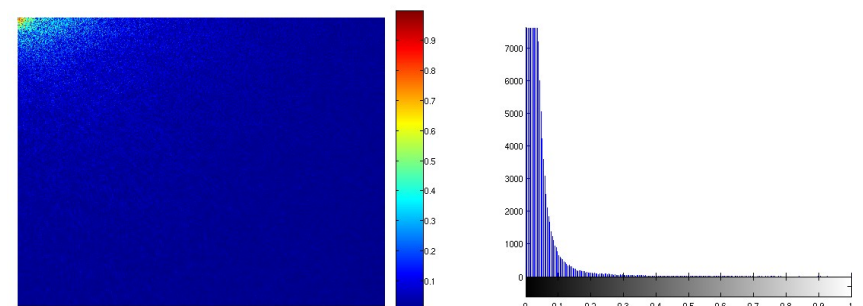
- But : Réduire la taille des données
- Jeter l'information jugée inutile
- Exemple : JPEG, MP3...



**DFT**



**DCT**

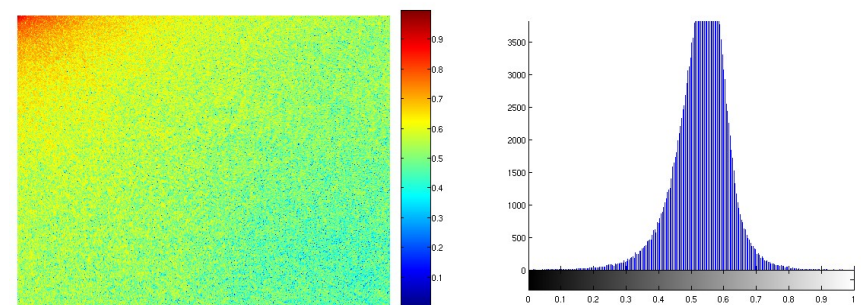


# Compression

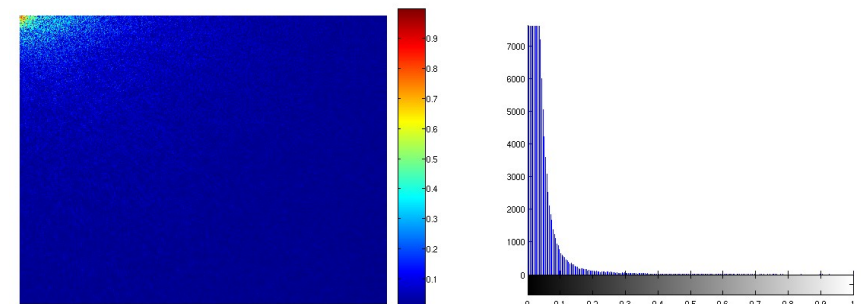
- But : Réduire la taille des données
  - Jeter l'information jugée inutile
  - Exemple : JPEG, MP3...
- **Gaspillage lors de l'acquisition**



**DFT**

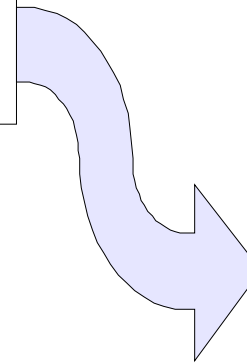
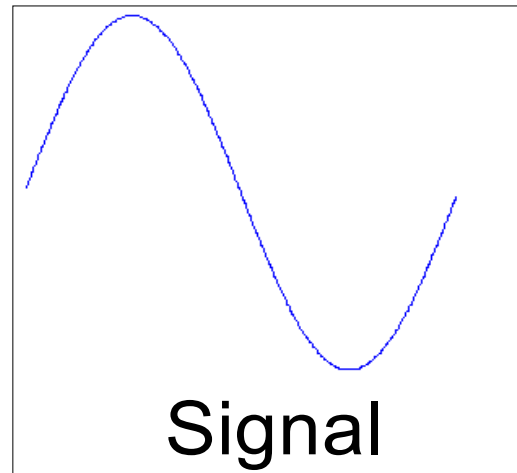


**DCT**



# Compressive sensing

- Principe
- Reconstruction
- Robustesse
- Applications



Amplitude du pic  
Emplacement

Données  
comprimées

# Principe

- Acquisition en une étape
- Changement de base
- Cas classique :  $C=I$

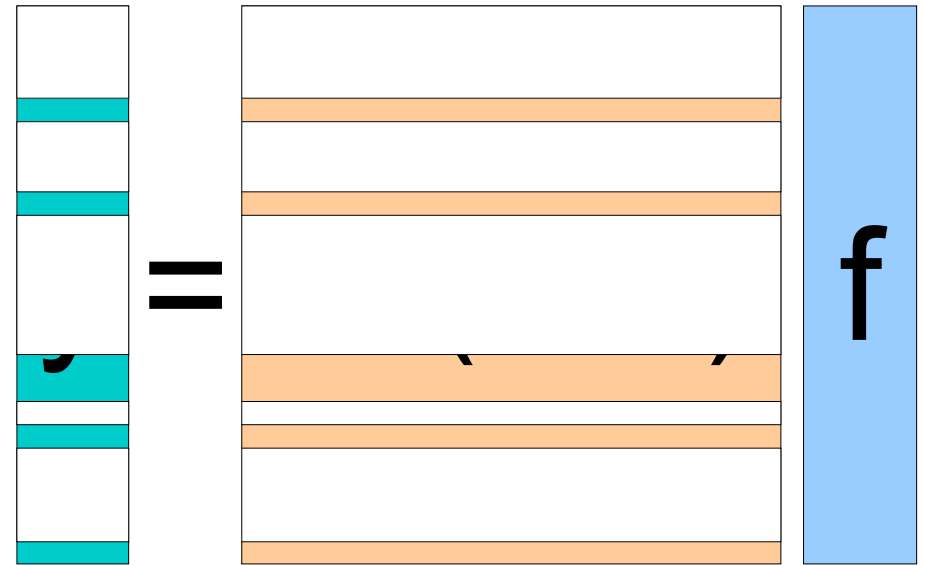
$$y = C^* (n \times n) f$$

$$y_i = \langle f, C_i \rangle$$

$$f = \sum_{i=1}^n y_i C_i$$

# Principe

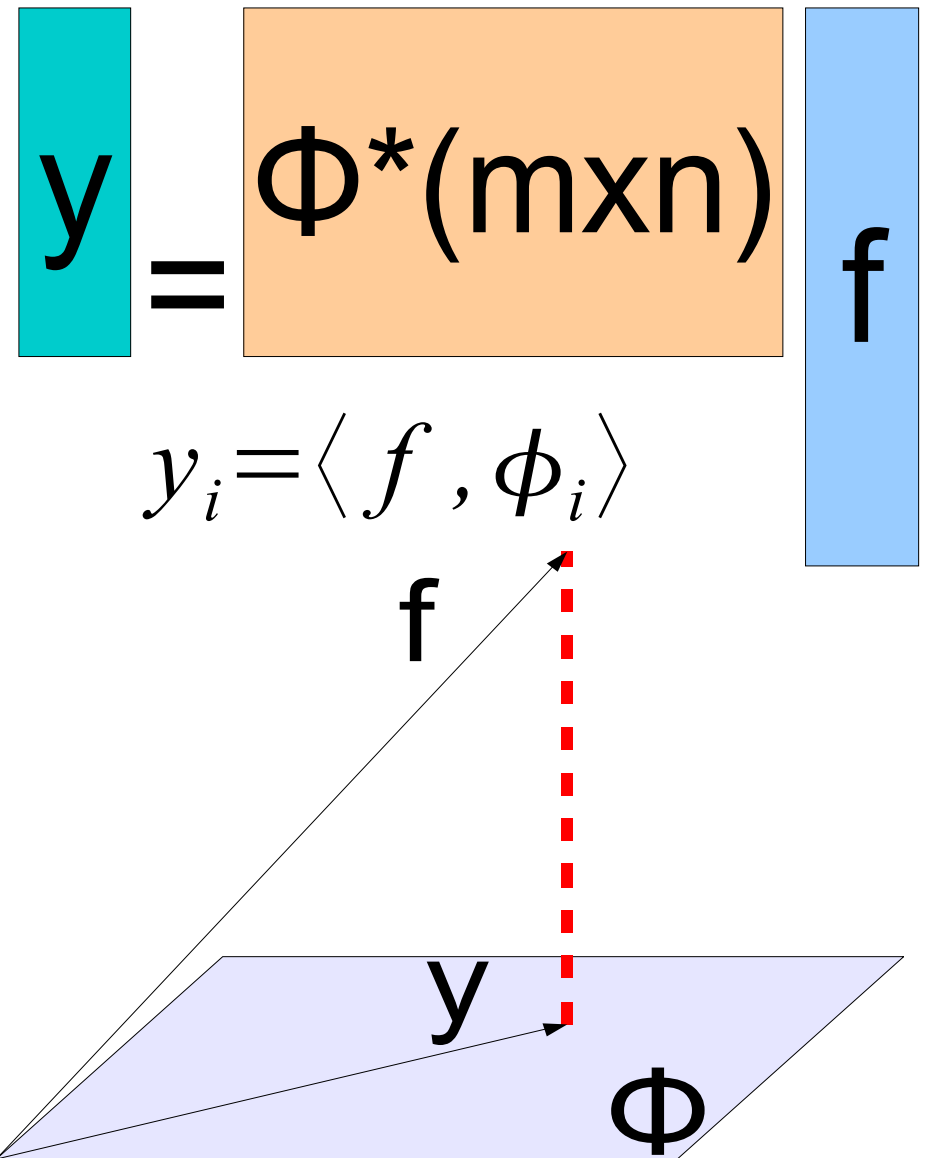
- Changement de base
- Cas classique :  $C=I$
- Echantillonnage de la matrice  $C \rightarrow \Phi(m,n)$



$$y_i = \langle f, C_i \rangle$$

# Principe

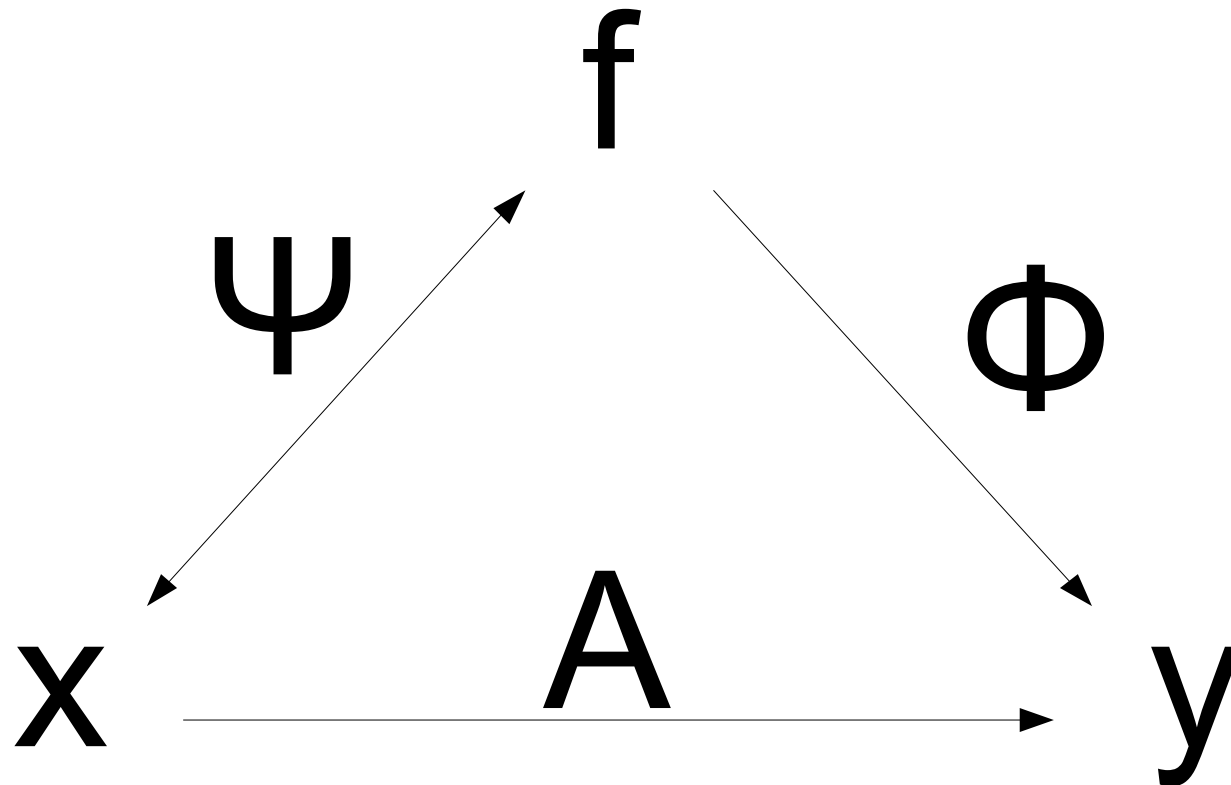
- Changement de base
- Cas classique :  $C=I$
- Echantillonnage de la matrice  $C \rightarrow \Phi(m,n)$
- Reconstruction ?
  - **Infinité de solutions**



# Reconstruction

- Hypothèse : il existe une base  $\Psi$ , dans laquelle le signal  $f$  admet une représentation creuse  $x$

Définition : signal  $S$ -creux  $\leftrightarrow S$  composantes non-nulles



# Reconstruction

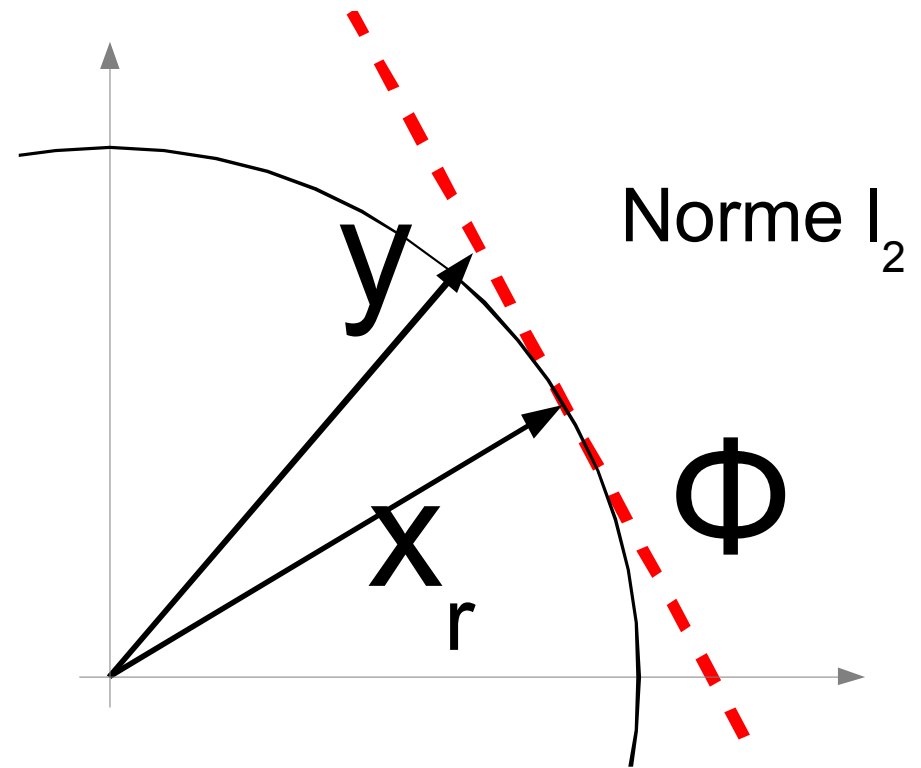
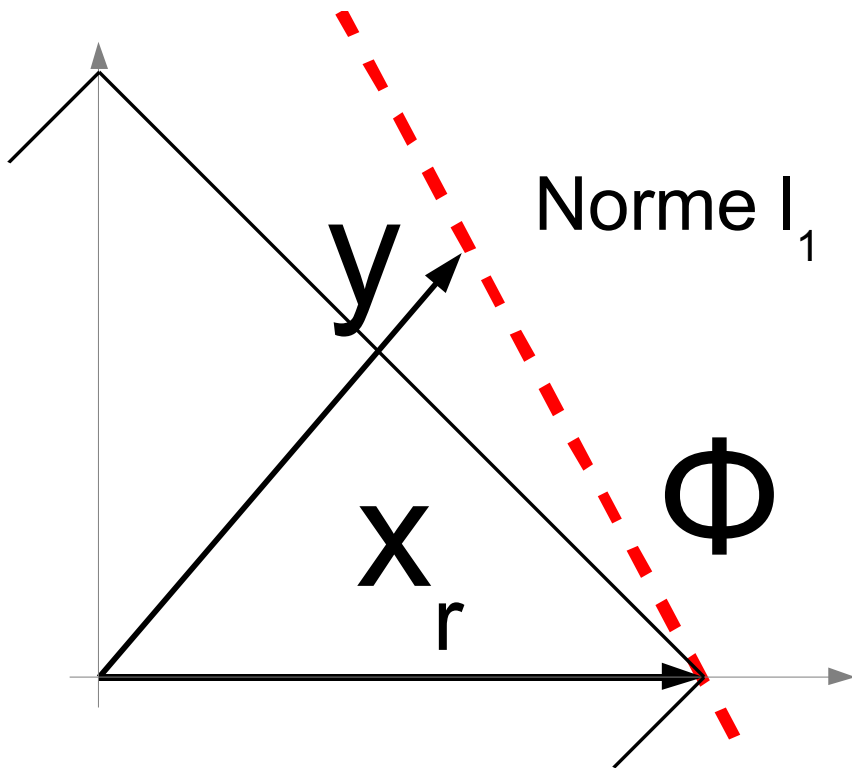
---

- On va chercher le signal  $x_r$  le plus creux :

$$\min \|x_r\|_{l_0} \text{ tel que } y = \Phi' f_r = \Phi' \Psi x_r$$

# Reconstruction : interprétation graphique

- En pratique : norme 0 trop compliquée
- On utilise la norme  $l_1$



# Reconstruction : interaction entre les bases

---

- Facteur de cohérence entre les bases :

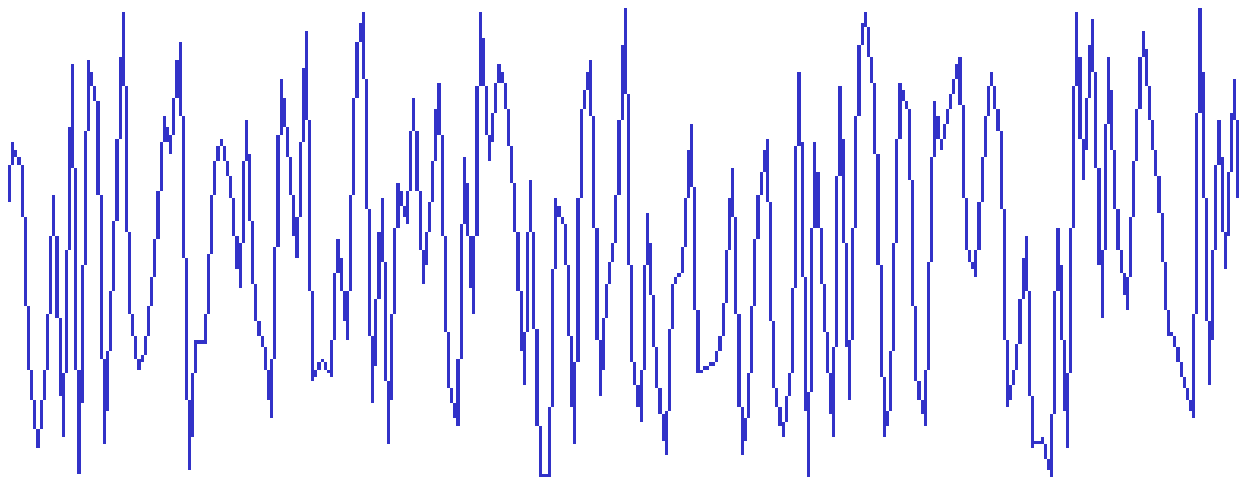
$$\mu = \sqrt{n} \max |\langle \phi_k, \psi_i \rangle|$$

- Représente la projection des vecteurs d'une base sur l'autre
- La cohérence doit être aussi faible que possible
- Intuitivement : il faut récupérer un peu d'information sur tous les vecteurs de  $\Psi$

# Reconstruction : exemples de $\mu$

---

- Fourier et échantillonnage normal :  $\mu = 1$
- Bases aléatoires (gaussienne, Bernoulli...) : faible cohérence avec une représentation fixe
- Acquérir les données en les projetant sur du bruit gaussien est quasi-optimal !



# Reconstruction : taille de la matrice $\Phi$ aléatoire

---

- Probabilité de reconstruction =  $1-\delta$  si
$$m \geq C \mu^2 S \log(n/\delta)$$
- Moins d'échantillons que Shannon-Nyquist ( $n$ )
- Reconstruction exacte si le signal est creux
- Faire tourner l'algorithme, et voir si on récupère un signal creux

# Propriété d'isométrie restreinte (PIR)

---

- Pour une matrice  $A$ , définir  $\delta_S$  tel que pour tout  $x$   $S$ -creux :

$$(1 - \delta_S) \|x\|_{l_2}^2 \leq \|Ax\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_S) \|x\|_{l_2}^2$$

- Si  $\delta_S < 1$ , alors  $A$  vérifie la PIR d'ordre  $S$ 
  - Aucun  $x$  n'appartient au noyau de  $A$  ( $Ax \neq 0$ )
  - Tous les ensembles de  $S$  colonnes de  $A$  sont plus ou moins orthogonales

# Lien entre PIR et CS

---

- On cherche à échantillonner  $x$   $S$ -creux, avec  $A$  qui vérifie la PIR d'ordre  $2S$  :

$$(1 - \delta_{2S}) \|x_1 - x_2\|_{l_2}^2 \leq \|A(x_1 - x_2)\|_{l_2}^2$$

- $x_1$  et  $x_2$  sont projetés à deux endroits différents sur  $A$
- Intuitivement, il doit y avoir moyen de les discerner, et de retrouver  $x$

# Robustesse

---

- Les signaux réels ne sont pas idéaux
- 2 problèmes : non-creux, et bruit

$x$  non-creux  $\rightarrow$  compression  $x$

$$\rightarrow \|x - x_r\|_{l_2} \leq C_0 \|x - x_s\|_{l_1}^s / \sqrt{S}$$

$$\rightarrow \|x - x_r\|_{l_1} \leq C_0 \|x - x_s\|_{l_1}$$

# Robustesse

---

- Les signaux réels ne sont pas idéaux
- 2 problèmes : non-creux, et bruit

signal bruité :  $y = Ax + e$

$$\rightarrow \|x - x_r\|_{l_2} \leq C_1 \varepsilon$$

→ Adapter la contrainte de reconstruction:

$$\|y - Ax_r\|_{l_2} \leq \varepsilon$$

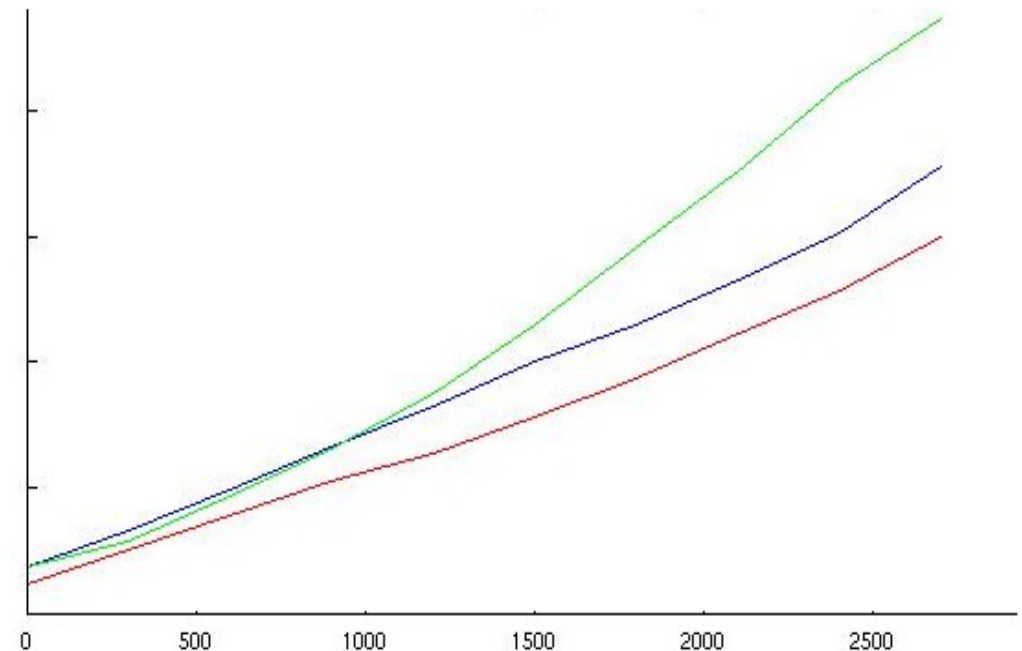
# Applications

---

- Acquisition de signaux très hautes fréquences
  - Si les signaux sont creux, on peut les récupérer après les avoir échantillonnés à basse fréquence (même si la bande passante est large)
- Compression
- Réduction du matériel nécessaire

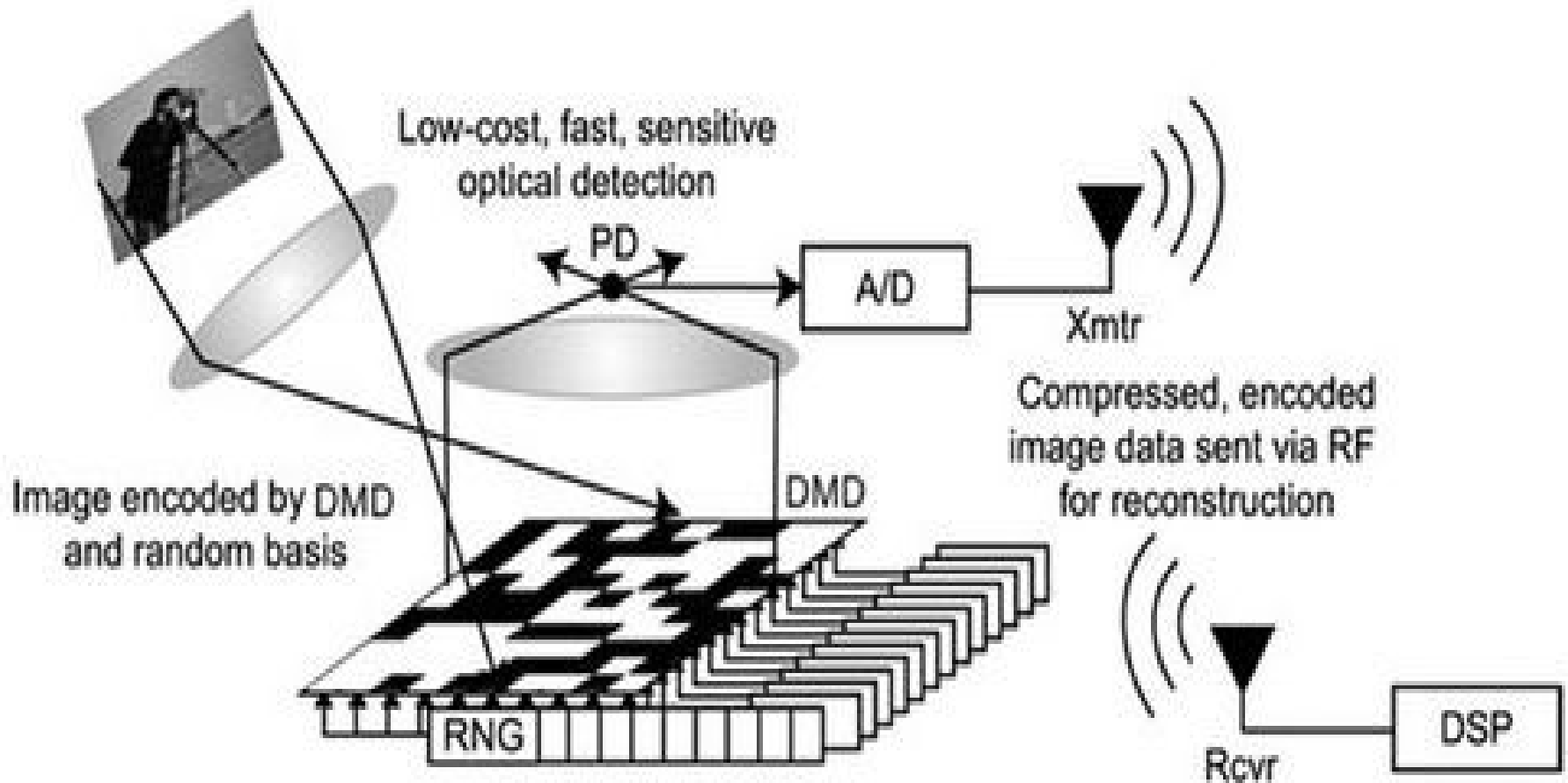
# Applications

- Compression d'images: meilleur rapport signal/bruit (vert) que JPEG-2000 (rouge)



# Applications

- Acquisition d'images



# Résumé

---

$$\min \|x_r\|_{l_0} \text{ tel que } y = \Phi' f_r = \Phi' \Psi x_r$$

