

Section 3.4

Calcul de valeurs propres

Définition du problème

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice réelle. Le vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^n$ est le **vecteur propre** associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{C}$ si

$$Av = \lambda v.$$

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un **vecteur propre** associé à la **valeur propre** -1 . En effet,

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calcul mathématique des valeurs propres

Proposition

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 6 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)(-4 - \lambda) + 18 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -1$ ou 2 .

Praticable pour une grande matrice ?

Que se passe-t-il si on a une matrice de grande taille ? (1000×1000 par exemple)

- Calcul d'un déterminant **symbolique** 1000×1000
- Calcul des racines d'un polynôme de degré 1000...
- Impossible d'appliquer la définition en pratique !

Dans ce cours, nous allons voir une méthode qui permet d'**approximer certaines valeurs propres** de manière **itérative**.

Quelques propriétés des valeurs propres

- Des **similitudes** préservent les **valeurs propres**

PAP^{-1} et A ont les mêmes valeurs propres.

- Si A est **symétrique**, toutes ses valeurs propres sont **réelles**.
- Dans la **plupart des cas**, les vecteurs propres forment une **base** de \mathbb{C}^n . La matrice est alors **diagonalisable**.
- Si la matrice est symétrique, les vecteurs propres **forment une base de \mathbb{R}^n** .

- $$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$$

- $$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{tr}(A).$$

La méthode de la puissance

Objectif : Calculer la valeur propre de **plus grand module**

Supposons

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Supposons que les différents vecteurs propres forment une base de \mathbb{C}^n

$$v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}.$$

On prend un vecteur complexe quelconque $w^{(0)}$ de départ. On a

$$w^{(0)} = \alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 v^{(2)} + \dots + \alpha_n v^{(n)},$$

On calcule ensuite

$$w^{(1)} = Aw^{(0)}$$

$$w^{(2)} = Aw^{(1)} = A^2 w^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$w^{(k)} = Aw^{(k-1)} = A^k w^{(0)}.$$

Méthode de la puissance

On a finalement

$$\begin{aligned}w^{(k)} &= A^k w^{(0)} \\ &= A^k (\alpha_1 v^{(1)} + \dots + \alpha_n v^{(n)}) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^k v^{(1)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^k v^{(n)}.\end{aligned}$$

Cela peut se réécrire comme

$$w^{(k)} = \lambda_1^k \left(\alpha_1 v^{(1)} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v^{(2)} + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v^{(n)} \right).$$

Comme $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ pour tout $j \neq 1$, tous les termes $(\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k$ tendent vers 0 quand k tend vers l'infini.

Remarque : nécessité de **normaliser** les vecteurs à chaque étape pour “voir quelque chose”.

$$z^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|}, \quad w^{(k+1)} = Az^{(k)}.$$

Calcul de la valeur propre de plus petit module

Si la matrice est **inversible**, on peut modifier la méthode pour calculer la valeur propre de **plus petit module**.

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors les valeurs propres de A^{-1} sont

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}.$$

La valeur propre de plus petit module de A est l'inverse de la **valeur propre de plus grand module** de A^{-1} .

On peut donc appliquer la méthode de la puissance à A^{-1}

$$z^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|}, \quad w^{(k+1)} = A^{-1}z^{(k)}.$$

Quelques remarques

- Si la matrice A a les valeurs propres

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

alors la **matrice $A - mI$** a les valeurs propres

$$\lambda_1 - m, \lambda_2 - m, \dots, \lambda_n - m.$$

- Peut être utilisé pour **accélérer la convergence**.
- Peut être utilisé pour trouver **la valeur propre la plus éloignée de m** .
- Peut être utilisé pour trouver **la valeur propre la plus proche de m** (mais alors en utilisant l'inverse de $A - mI$).

Calcul d'autres valeurs propres

Matrices symétriques

Si A est **symétrique** et que ses valeurs propres sont

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n,$$

et que $v^{(1)}$ est le vecteur propre associé à λ_1 alors
 $A_1 := A - \lambda_1 v^{(1)} v^{(1)T}$ a les valeurs propres

$$0, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Par similitudes

Trouvons une matrice P telle que $Pv^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- PAP^{-1} a les mêmes valeurs propres que A
-

$$PAP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & b^T \\ \hline 0 & A_1 \\ 0 & \end{array} \right)$$

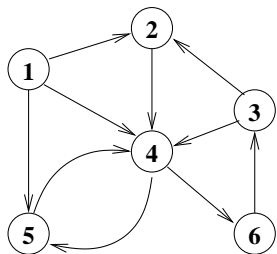
Application : Calcul du page rank de Google

Un sous-ensemble du worldwide web peut être vu comme un graphe où chaque page est un **noeud** du graphe et chaque lien est un **arc** pointant d'un noeud vers un autre.

Une page est considérée comme importante si beaucoup de pages **pointent vers elle**. Les liens des pages importantes peuvent être considérés comme ayant une plus grande valeur informative.

Le **page rank** d'une page est la **somme pondérée** des page rank des pages pointant vers elle.

Calcul du page rank



$$M = \tilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence non pondérée
pondérée

Le page rank d'une page est la somme pondérée (par la matrice d'adjacence pondérée) des page rank des pages pointant vers elle. Mathématiquement si v est le page rank, on a

$$\tilde{M}^T v = v.$$

Le page rank v est le vecteur propre correspondant à la valeur propre 1 de la matrice \tilde{M}^T

Le problème aux valeurs propres à 1 000 000 000\$

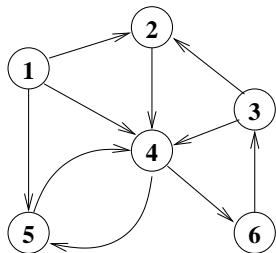
Définition

Une matrice est dite **stochastique** si la **somme de chacune de ses lignes** vaut 1.

Proposition

Toute matrice stochastique possède 1 comme **valeur propre de plus grand module**.

Si on applique la méthode de la puissance à \tilde{M}^T , on convergera rapidement vers le vecteur **page rank**.



$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$