Introduction à l'Analyse Numérique

Quentin Louveaux

ULg - Institut Montefiore

2009

L'algorithme du simplexe

Principes

- Partir d'une solution de base réalisable
- Vérifier si la base courante est optimale
- Si ce n'est pas le cas, trouver une direction d'amélioration
- La direction d'amélioration mène soit à . . . une meilleure solution de base réalisable
- soit . . . à prouver que le problème est non borné

Question fondamentale

Soit x une solution de base réalisable.
Trouver une direction d telle que $x + \theta d$ est réalisable pour un $\theta \geq 0$

Trouver une direction réalisable à partir d'une solution de base réalisable

Soit : $x = (x_B \; x_N) \in P$
Trouver d telle que $x + d\theta \in P$

- On veut changer au moins une variable non basique.
  Selectionner un indice $j \in N$

$$d_j = 1 \quad d_i = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

- On a $Ax = b$ et $A(x + \theta d) = b \Rightarrow Ad = 0$
-

$$0 = Ad = \sum_{i=1}^{n} A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j$$

$$Bd_B + A_j$$

- $d_B = -B^{-1}A_j$ est la j^e direction de base

Les contraintes de positivité

- Variables non basiques : x_i $(i \neq j)$: $= 0$: $\Rightarrow$ OK !
  x_j : va dans la direction positive $\Rightarrow$ OK !
- Variables basiques
  Cas non dégénéré : $x_B > 0$
  Donc $x_B + \theta d_B \geq 0$ pour θ suffisamment petit
- Cas dégénéré : $x_{B(i)} = 0$ pour un i
  2 cas
  (1) $(d_B)_i = (-B^{-1}A_j)_i \geq 0 \Rightarrow$ réalisable pour θ suffisamment petit
  (2) $(d_B)_i = (-B^{-1}A_j)_i < 0 \Rightarrow$ non réalisable pour tout θ

Vérifier l'optimalité

Question essentielle : Est-ce que la base courante est optimale ou peut-on trouver une direction basique qui améliore la fonction objectif ?

Définition : $c_B = (c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)})$

Calculons le taux de changement de l'objectif pour la j^e direction basique.

$d = (d_B \; d_N)$ with $d_B = -B^{-1}A_j \quad d_N = e_j$

$$\begin{aligned} c^T d &= c^T d_B + c^T d_N \\ &= -c_B^T B^{-1} A_j + c_j \end{aligned}$$

Définition

Le coût réduit de la j^e variable non basique est

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

Critère d'optimalité

Théorème

Considérons une solution de base réalisable x

(i) Si $\bar{c} \geq 0$ alors x est optimal

(ii) Si x est optimal et non dégénéré alors $\bar{c} \geq 0$.

Définition

Une matrice de base B est dite optimale si

(i) $B^{-1}b \geq 0$ et

(ii) $\bar{c} = -c_B^T B^{-1} A \geq 0$

Algorithme du simplexe

Partie itérative : Partir de B et faire

Si $\bar{c}_j \geq 0$ pour tout j

alors la base courante est optimale

sinon selectionner une variable non basique j avec $\bar{c}_j < 0$

On fait entrer j dans la base

On recherche θ maximal tel que $x + \theta d \in P$

Si $d_i \geq 0$ pour tout $i \in B$

alors $x + \theta d \geq 0$ pour tout $\theta \geq 0$

Le problème est non borné et $OPT = -\infty$

Si $d_i <$ pour un $i \in B$

alors $\theta^* = \min_{\{i \in B | d_{B(i)} < 0\}} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right)$.

La variable i qui réalise le minimum sort de la base

On bouge à un sommet voisin (solution de base réalisable)

$B \leftarrow B \cup \{j\} \setminus \{i\}$

Nouveau point:$= x + \theta^* d$

L'opération de passer à une base voisine

Dans une itération de l'algorithme du simplexe, dans la base, on remplace la variable i telle que

$$i = \arg\min\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \mid i \in B \text{ t.q. } d_{B(i)} < 0\}$$

par la variable j qui entre dans la base (choisie telle que $\bar{c}_j < 0$).

Théorème

(i) Les colonnes $A_{B(k)}$, $k \neq i$ et A_j sont linéairement indépendantes

(ii) Le vecteur $y = x + \theta^* d$ est une solution de base associée à la nouvelle base.

Trouver une base initiale

2 questions : trouver une solution r'ealisable et trouver la base correspondante .

Un cas facile

Considérons un problème du type $Ax \leq b$ où $b \geq 0$.
La forme standard , si on rajoute les variables d'écart est

$$
\begin{array}{lcr}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 & & = b_1 \\
\vdots & \ddots & \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & & + s_m = b_m.
\end{array}
$$

Le point $(x_1 = 0, \cdots, x_n = 0)$ est une solution réalisable et $(s_1 \ \cdots \ s_m)$ est la base correspondante.

En général

Il n'est pas facile de trouver une base réalisable.
On peut essayer n'importe quelle base (choix de m variables) mais on n'a aucune garantie qu'elle est réalisable.
Dans certains cas, le problème est non réalisable $\rightarrow$ il pourrait être impossible de trouver une solution de base réalisable.

Trouver une base initiale par la programmation linéaire et l'algorithme du simplexe

Phase I

Considérons un problème du type $Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+$ où on suppose (après multiplication de certaines lignes par -1) que $b \geq 0$.

$$\begin{array}{lllll}
\min & & \xi_1 + \cdots + & \xi_m & \\
& a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & + \xi_1 & & = b_1 \\
& & \ddots & & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & & + \xi_m & = b_m
\end{array}$$

- Si la solution optimale de la phase 1 est $> 0 \Rightarrow$ le problème initial est non réalisable.
- Si le problème initial est réalisable $\Rightarrow$ la phase I a 0 comme solution optimale .
- Une dernière question : comment obtenir une base initiale pour le problème initial sans les variables ξ_i

La méthode du grand M

Phase I et Phase II ensemble

Considérons un problème du type $Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+$ où on suppose (après multiplication des lignes par -1) que $b \geq 0$.

$$
\begin{array}{llllll}
\min c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & + M\xi_1 + \cdots + & M\xi_m & & \\
\quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & + \xi_1 & & & = b_1 \\
 & & \ddots & & \vdots \\
\quad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & & & + \xi_m & = b_m
\end{array}
$$

- M est considéré très grand
- Quand une variable auxiliaire ξ_i sort de la base, on peut éliminer toute la colonne.