

# Introduction à l'Analyse Numérique

Quentin Louveaux

ULg - Institut Montefiore

2009

## Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit **deux types** de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit **basique** requiert **9 planches de cerisier** et **2 planches de hêtre** par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert **1 heure de travail** par un ouvrier.

Le deuxième type, dit **classique** requiert **7 planches de cerisier** et **5 planches de hêtre**. Dû au travail de finition plus important, la chaise requiert **3 heures de travail** par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend **30 euros la pièce** alors qu'une chaise de type classique se vend **70 euros la pièce**.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de **800 planches de cerisier** et **200 planches de hêtre**. Il y a **4 ouvriers** travaillant chacun **40 heures** par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

## Modélisation du problème

### Choix des variables

$x_B$  = Nombre de chaises de type **basique** à construire pour la semaine

$x_C$  = Nombre de chaises de type **classique** à construire pour la semaine

### Objectif à optimiser

$$\max 30x_B + 70x_C$$

### Contraintes

**Cerisier** :  $9x_B + 7x_C \leq 800$

**Hêtre** :  $2x_B + 5x_C \leq 200$

**Travail** :  $x_B + 3x_C \leq 160$

**Autre** :  $x_B \geq 0, x_C \geq 0$  (et  $x_B, x_C$  entiers).

$$\max 30x_B + 70x_C$$

$$\text{s.t. } 9x_B + 7x_C \leq 1000$$

$$2x_B + 5x_C \leq 200$$

$$x_B + 3x_C \leq 160$$

$$x_B, x_C \geq 0$$

## Production d'alliage

The company Steel has received an order for 500 tons of steel to be used in shipbuilding. This steel must have the following characteristics

Chemical element	Minimum grade	Maximum grade
Carbon (C)	2	3
Copper (Cu)	0.4	0.6
Manganese (Mn)	1.2	1.65

The company has seven different raw materials in stock that may be used for the production of this steel. The following Table lists the grades, available amounts and prices for all raw materials.

Raw material	C %	Cu %	Mn %	Availability in t	Cost in €/t
Iron alloy 1	2.5	0	1.3	400	200
Iron alloy 2	3	0	0.8	300	250
Iron alloy 3	0	0.3	0	600	150
Copper alloy 1	0	90	0	500	220
Copper alloy 2	0	96	4	200	240
Aluminum alloy 1	0	0.4	1.2	300	200
Aluminum alloy 2	0	0.6	0	250	165

The objective is to determine the composition of the steel that minimizes the production cost.

# Formulation du problème

## Choix des variables de décision

$use_i$  : quantité d'alliage  $i$  utilisée ( $i \in I$ )

## Objectif à optimiser

$$\min \sum_{i \in I} \text{prix}_i \text{ use}_i$$

## Contraintes

**Carbone** :  $LB_C \leq \sum_{i \in I} C_i \text{ use}_i \leq UB_C$

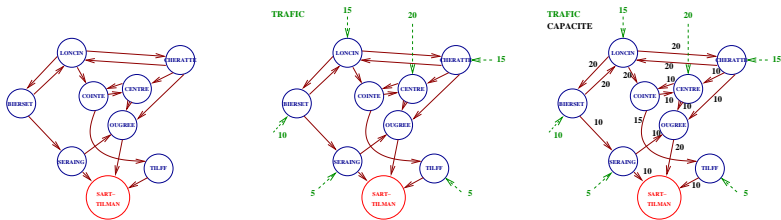
**Cuivre** :  $LB_{Cu} \leq \sum_{i \in I} Cu_i \text{ use}_i \leq UB_{Cu}$

**Manganèse** :  $LB_{Mn} \leq \sum_{i \in I} Mn_i \text{ use}_i \leq UB_{Mn}$

**Disponibilité** :  $0 \leq \text{use}_i \leq \text{Stock}_i$

**Production** :  $\sum_{i \in I} \text{use}_i = \text{Demand}$

# Problème de gestion du trafic



## Questions :

Quelle est la capacité totale du réseau ?

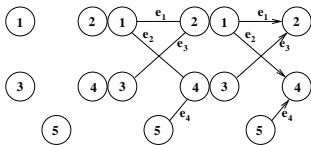
Quelles routes sont saturées ? Quelles nouvelles routes faut-il construire ?

## Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

### Définition d'un graphe

Un graphe  $G = (V, E)$  est un ensemble de noeuds  $V$  et un ensemble d'arêtes  $e = (i, j)$  reliant le noeud  $i$  au noeud  $j$ .



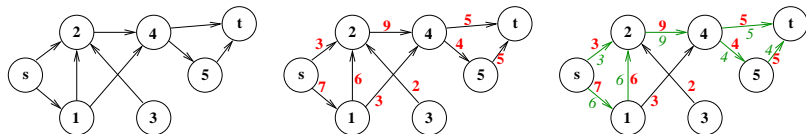
Les **noeuds** d'un graphe  
Les noeuds et les **arêtes** d'un  
graphe  
Un graphe **dirigé** ou **digraphe**

## Problème de flot maximum

Faire passer le flot maximum d'un noeud  $s$  (source) à un noeud  $t$  (sink).

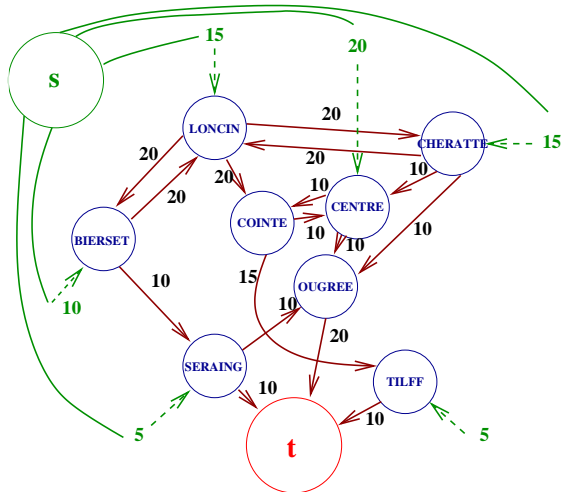
Chaque **arête** a une certaine **capacité**

**Exemple** d'un flot réalisable



## Retour à Liège...

Peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe !



## Formulation algébrique

Il existe de très bons algorithmes **combinatoires** pour résoudre le problème de flot maximum.

On peut aussi modéliser par un **programme mathématique**

### Variables de décision

$x_{ij}$  = flot dans l'arête reliant le noeud  $i$  au noeud  $j$  (si existante)

### Objectif à optimiser

$$\max \sum_{i \in \delta^+(s)} x_{si}$$

### Contraintes

Pour tout noeud  $i$  (autre que  $s$  ou  $t$ ), on nécessite la conservation du flot :

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{l \in \delta^-(i)} x_{li} \quad \text{pour tout } i \neq s, t.$$

Borne sur les arêtes :  $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  où  $u$  est la capacité

## Différentes formes de programmes linéaires

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, \\ & -3 \leq x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 7x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Objectif** : min ou max

**Contraintes** :  $\geq, \leq, =$

**Bornes** :  $\geq 0, \leq 0, [l, u], \mathbb{R}$

## Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

**Objectif :**

$$\max f(x) \equiv - \min -f(x)$$

$$\max 2x_1 - 7x_2 \equiv - \min -2x_1 + 7x_2$$

**Contraintes :**

$$f(x) \leq b \equiv -f(x) \geq -b \quad 2x_1 - x_2 \leq 1 \equiv -2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \leq b \text{ et } f(x) \geq b \quad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \leq 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \geq 3$$

$$f(x) \leq b \equiv f(x) + s = b, \text{ avec } s \geq 0 \quad 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \geq 0 \text{ avec } s \geq 0$$

**Bornes :**

$$x \leq 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \text{ et } \hat{x} \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \text{ et } y^+, y^- \geq 0 \text{ ! Pas d'équival !}$$

## Forme standard

La **forme standard** consiste en

- Objectif : **minimisation**
- Contraintes : **égalités**
- Bornes : Variables **positives**

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

**Exercice** : Réduire un problème donné à la forme standard

## Représentation graphique

On peut représenter graphiquement un problème en deux dimensions.

Exemple :

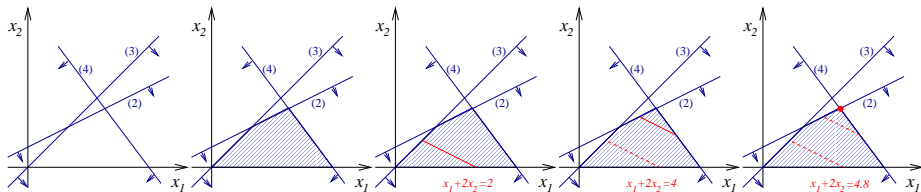
$$\max x_1 + 2x_2 \quad (1)$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 1 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \quad (3)$$

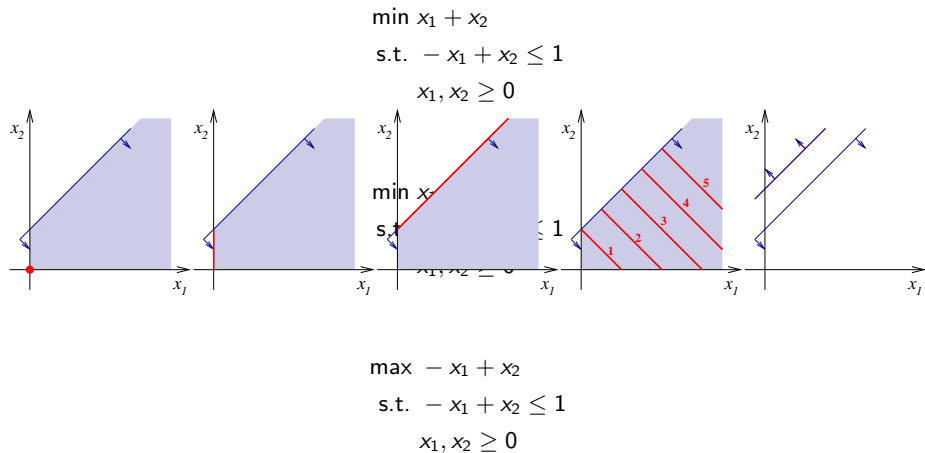
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$



## Cas dégénérés

Dans l'exemple, on avait **une solution unique** à un **sommet** du **polyèdre**. Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.



## Définition

Un **polyèdre** est un ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$

Un ensemble de la forme  $Ax \leq b$  est aussi un polyèdre.

Un ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$  est un polyèdre en **représentation standard**.

## Définition

Soit  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

- (a) L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$  est un **hyperplan**
- (b) L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$  est un **demi-espace**

# Ensembles convexes

## Définition

Un ensemble  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  est **convexe** si pour tout  $x, y \in S$  et tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,  
 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ .

## Définition

Soient  $x^1, \dots, x^k$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

- (i)  $\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k$  est une **combinaison conique** si  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$
- (ii)  $\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_k x^k$  est une **combinaison convexe** si  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$
- (iii) L'**enveloppe convexe** de  $x^1, \dots, x^k$  est l'ensemble de **toutes les combinaisons convexes** de  $x^1, \dots, x^k$ .

## Théorème

- (a) L'intersection de deux ensembles convexes **est convexe**
- (b) Tout polyèdre **est convexe**
- (c) L'enveloppe convexe d'un **nombre fini** de points est un **polyèdre**.

### Définition

Soit  $P$  un polyèdre. Un point  $x \in P$  est un **point extrême** de  $P$  s'il n'existe pas deux points  $y, z \in P$  tels que  $x$  soit une combinaison convexe de  $y$  et  $z$ .

### Définition

Soit  $P$  un polyèdre. Un point  $x \in P$  est un **sommet** de  $P$  si il existe  $c \in \mathbb{R}^n$  tel que  $c^T x < c^T y$  pour tout  $y \in P$  et  $y \neq x$ .

## Bases d'un polyèdre

On considère les différentes égalités et inégalités en trois catégories :

$$a_i^T x \geq b_i \quad i \in M_{\geq}$$

$$a_i^T x \leq b_i \quad i \in M_{\leq}$$

$$a_i^T x = b_i \quad i \in M_{=}$$

### Définition

Si un point  $\bar{x}$  satisfait  $a_i^T \bar{x} = b_i$  pour un certain  $i \in M_{\geq}, M_{\leq}$  ou  $M_{=}$ , on dit que la contrainte  $i$  est **active** ou **serrée**.

### Théorème

Soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  et soit  $I$  l'ensemble des contraintes qui sont **actives** en  $\bar{x}$ . Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe  $n$  vecteurs **linéairement indépendants** dans  $\{a_i | i \in I\}$
- (ii)  $\text{span}\{a_i | i \in I\} = \mathbb{R}^n$
- (iii) Le système  $a_i^T x = b_i, i \in I$  a une **solution unique**.

# Bases d'un polyèdre

## Définition

Soit  $P$  un polyèdre et soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

(a)  $\bar{x}$  est une **solution de base** si

- ▶ toutes les égalités ( $i \in M_=\$ ) sont **actives**
- ▶ parmi les contraintes actives, il y en a  $n$  qui sont **linéairement indépendantes**

(b) si  $\bar{x}$  est une solution de base qui **qui satisfait toutes les contraintes**, alors  $\bar{x}$  est une **solution de base réalisable**.

## Théorème

Soit  $P$  un polyèdre et soit  $\bar{x} \in P$ . Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

- (i)  $\bar{x}$  est un **sommet**
- (ii)  $\bar{x}$  est un **point extrême**
- (iii)  $\bar{x}$  est une **solution de base réalisable**

## Polyèdres en représentation standard

On considère  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ .

On considère que les **lignes de  $A$  sont linéairement indépendantes**.

### Théorème

Un point  $\bar{x}$  est une solution de base si  $A\bar{x} = b$  et si il existe  $m$  indices  $B(1), \dots, B(m)$  tels que

- (i) Les colonnes  $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$  sont linéairement indépendantes
- (ii) Si  $i \neq B(1), \dots, B(m)$ , alors  $x_i = 0$

*Explication :*

$$\begin{array}{l} m \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \end{array} \quad \left( \begin{array}{c} A \\ I \end{array} \right) x = \left( \begin{array}{c} b \\ 0 \end{array} \right)$$

On a  $n + m$  contraintes et  $n$  variables.

Une solution de base  $\Rightarrow n$  contraintes satisfaites avec égalité.

Les  $m$  égalités sont d'office satisfaites.

Il y a  $n - m$  inégalités  $x_i \geq 0$  qui sont **actives** (les variables **hors base**).

Il y a  $m$  inégalités  $x_i \geq 0$  qui sont éventuellement non actives (**variables de base**).

## Construction d'une base

### Procédure ( $\neq$ Algorithme)

- (i) Choisir  $m$  colonnes linéairement indépendantes  $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$
- (ii)  $x_i = 0$  pour tout  $i \neq B(1), \dots, B(m)$
- (iii) Résoudre  $Ax = b$  pour les inconnues  $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$

Si la solution  $x \geq 0$ , alors  $x$  est une solution de base **réalisable**.

On construit la **matrice de base** comme

$$B = \left( A_{B(1)} \quad A_{B(2)} \quad \cdots \quad A_{B(m)} \right)$$

La **matrice hors base**  $N$  correspond aux indices hors base.

Le **vecteur de base** est  $x_B = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})$  et le **vecteur hors base** correspond aux autres indices.

On a

$$Bx_B = b$$

$$x_N = 0$$

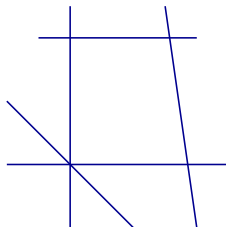
$$Bx_B + Nx_n = b$$

### Exemple

## Quelques remarques importantes

Correspondance entre la **base** et la **solution de base**

Deux **bases différentes** peuvent mener à la **même solution  $x$** .



**Bases adjacentes**

Deux bases sont **adjacentes** si elles ne diffèrent que d'**un indice**.

Vu autrement, elles ont  $n - 1$  indices en commun !

## Définition

Une solution de base  $x \in \mathbb{R}^n$  est **dégénérée** si **plus que  $n$  contraintes** sont actives à la solution.

## Dégénérescence dans le cas standard

Soit  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ , avec  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Une solution de base  $x$  est **dégénérée** si  $x$  a **plus de  $n - m$  éléments nuls**.

**Remarque** : La dégénérescence peut dépendre de la représentation !

Une base **non dégénérée** peut être dégénérée sous une autre forme et inversement.

**Exemple** :

## Existence de points extrêmes

### Définition

A polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  **contient une ligne** s'il existe  $x \in P$  et un vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x + \lambda d \in P$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Théorème

Soit un polyèdre  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$  non-vide. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

- (i)  $P$  a au moins un **point extrême**
- (ii)  $P$  ne contient pas de ligne
- (iii) Il existe  $n$  vecteurs  $a_i$  linéairement indépendants

### Corollaire

Tout polyèdre **borné** admet au moins un point extrême.

Tout polyèdre en format standard admet au moins un point extrême.

## Les points extrêmes sont les candidats *points optimaux*

### Théorème

Soit le problème

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ \text{s.t. } x \in P. \end{aligned}$$

Si  $P$  a au moins un point extrême et qu'il existe une solution optimale, alors **il existe une solution optimale qui est un point extrême.**

Généralisation du théorème précédent : soit la solution optimale est  $-\infty$  soit il existe un point extrême qui est une solution optimale.

### Théorème

Si  $P$  a au moins un point extrême, le problème

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ \text{s.t. } x \in P. \end{aligned}$$

a, soit  $+\infty$  comme valeur optimale, soit il existe un point extrême qui est optimal.

## Théorème fondamental de Minkowski-Weyl

Tout polyèdre  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  peut être représenté comme

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^p\} + \text{cone}\{r^1, \dots, r^q\}.$$

Les  $v^i$  sont les **points extrêmes**.

Les  $r^j$  sont les **rayons extrêmes**.

De manière équivalente,

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{aligned} x &= \lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_p v^p + \mu_1 r^1 + \dots + \mu_q r^q \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_p &= 1 \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0 \text{ pour tout } i, j. \end{aligned} \right\}$$