Introduction à l'Analyse Numérique

Quentin Louveaux

ULg - Institut Montefiore

2009

Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit deux types de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit basique requiert 9 planches de cerisier et 2 planches de hêtre par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert 1 heure de travail par un ouvrier.

Le deuxième type, dit classique requiert 7 planches de cerisier et 5 planches de hêtre. Dû au tavail de finition plus important, la chaise requiert 3 heures de travail par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend 30 euros la pièce alors qu'une chaise de type classique se vend 70 euros la pièce.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de 800 planches de cerisier et 200 planches de hêtre. Il y a 4 ouvriers travaillant chacun 40 heures par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit deux types de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit basique requiert 9 planches de cerisier et 2 planches de hêtre par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert 1 heure de travail par un ouvrier.

Le deuxième type, dit classique requiert 7 planches de cerisier et 5 planches de hêtre. Dû au tavail de finition plus important, la chaise requiert 3 heures de travail par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend 30 euros la pièce alors qu'une chaise de type classique se vend 70 euros la pièce.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de 800 planches de cerisier et 200 planches de hêtre. Il y a 4 ouvriers travaillant chacun 40 heures par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit deux types de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit basique requiert 9 planches de cerisier et 2 planches de hêtre par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert 1 heure de travail par un ouvrier.

Le deuxième type, dit classique requiert 7 planches de cerisier et 5 planches de hêtre. Dû au tavail de finition plus important, la chaise requiert 3 heures de travail par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend 30 euros la pièce alors qu'une chaise de type classique se vend 70 euros la pièce.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de 800 planches de cerisier et 200 planches de hêtre. Il y a 4 ouvriers travaillant chacun 40 heures par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit deux types de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit basique requiert 9 planches de cerisier et 2 planches de hêtre par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert 1 heure de travail par un ouvrier.

Le deuxième type, dit classique requiert 7 planches de cerisier et 5 planches de hêtre. Dû au tavail de finition plus important, la chaise requiert 3 heures de travail par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend 30 euros la pièce alors qu'une chaise de type classique se vend 70 euros la pièce.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de 800 planches de cerisier et 200 planches de hêtre. Il y a 4 ouvriers travaillant chacun 40 heures par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit deux types de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit basique requiert 9 planches de cerisier et 2 planches de hêtre par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert 1 heure de travail par un ouvrier.

Le deuxième type, dit classique requiert 7 planches de cerisier et 5 planches de hêtre. Dû au tavail de finition plus important, la chaise requiert 3 heures de travail par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend 30 euros la pièce alors qu'une chaise de type classique se vend 70 euros la pièce.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de 800 planches de cerisier et 200 planches de hêtre. Il y a 4 ouvriers travaillant chacun 40 heures par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

Problème de choix de production

Un fabricant de meubles produit deux types de chaises à partir de bois de hêtre et de cerisier.

Le premier type, dit basique requiert 9 planches de cerisier et 2 planches de hêtre par chaise montée. Une chaise basique est facile à construire et requiert 1 heure de travail par un ouvrier.

Le deuxième type, dit classique requiert 7 planches de cerisier et 5 planches de hêtre. Dû au tavail de finition plus important, la chaise requiert 3 heures de travail par un ouvrier.

Une chaise de type basique se vend 30 euros la pièce alors qu'une chaise de type classique se vend 70 euros la pièce.

Le stock de planches de l'entreprise se compose de 800 planches de cerisier et 200 planches de hêtre. Il y a 4 ouvriers travaillant chacun 40 heures par semaine dans l'entreprise.

Quel nombre de chaises de type basique et classique l'entreprise doit-elle construire pour la semaine ?

Modélisation du problème

Choix des variables

x_B = Nombre de chaises de type basique à construire pour la semaine
x_C = Nombre de chaises de type classique à construire pour la semaine

Objectif à optimiser

$$\max 30x_B + 70x_C$$

Contraintes

Cerisier : $9x_B + 7x_C \leq 800$
Hêtre : $2x_B + 5x_C \leq 200$
Travail : $x_B + 3x_C \leq 160$
Autre : $x_B \geq 0, x_C \geq 0$ (et x_B, x_C entiers).

$$\begin{aligned}
\max\ & 30x_B + 70x_C \\
\text{s.t.}\ & 9x_B + 7x_C \leq 1000 \\
& 2x_B + 5x_C \leq 200 \\
& x_B + 3x_C \leq 160 \\
& x_B, \quad x_C \geq 0
\end{aligned}$$

Modélisation du problème

Choix des variables

$x_B =$ Nombre de chaises de type basique à construire pour la semaine
$x_C =$ Nombre de chaises de type classique à construire pour la semaine

Objectif à optimiser

$$\max 30x_B + 70x_C$$

Contraintes

Cerisier : $9x_B + 7x_C \leq 800$
Hêtre : $2x_B + 5x_C \leq 200$
Travail : $x_B + 3x_C \leq 160$
Autre : $x_B \geq 0, x_C \geq 0$ (et x_B, x_C entiers).

$$\begin{aligned} \max\ & 30x_B + 70x_C \\ \text{s.t.}\ & 9x_B + 7x_C \leq 1000 \\ & 2x_B + 5x_C \leq 200 \\ & x_B + 3x_C \leq 160 \\ & x_B,\ x_C \geq 0 \end{aligned}$$

Modélisation du problème

Choix des variables

x_B = Nombre de chaises de type basique à construire pour la semaine
x_C = Nombre de chaises de type classique à construire pour la semaine

Objectif à optimiser

$$\max 30x_B + 70x_C$$

Contraintes

Cerisier : $9x_B + 7x_C \leq 800$
Hêtre : $2x_B + 5x_C \leq 200$
Travail : $x_B + 3x_C \leq 160$
Autre : $x_B \geq 0, x_C \geq 0$ (et x_B, x_C entiers).

$$\begin{array}{rrrl}
\max & 30x_B + & 70x_C & \\
\text{s.t.} & 9x_B + & 7x_C & \leq 1000 \\
 & 2x_B + & 5x_C & \leq 200 \\
 & x_B + & 3x_C & \leq 160 \\
 & x_B, & x_C & \geq 0
\end{array}$$

Modélisation du problème

Choix des variables

x_B = Nombre de chaises de type basique à construire pour la semaine
x_C = Nombre de chaises de type classique à construire pour la semaine

Objectif à optimiser

$$\max 30x_B + 70x_C$$

Contraintes

Cerisier : $9x_B + 7x_C \leq 800$
Hêtre : $2x_B + 5x_C \leq 200$
Travail : $x_B + 3x_C \leq 160$
Autre : $x_B \geq 0, x_C \geq 0$ (et x_B, x_C entiers).

$$\begin{aligned} \max\ & 30x_B + 70x_C \\ \text{s.t.}\ & 9x_B + 7x_C \leq 1000 \\ & 2x_B + 5x_C \leq 200 \\ & x_B + 3x_C \leq 160 \\ & x_B, \quad x_C \geq 0 \end{aligned}$$

Production d'alliage

The company Steel has received an order for 500 tons of steel to be used in shipbuilding. This steel must have the following characteristics

Chemical element	Minimum grade	Maximum grade
Carbon (C)	2	3
Copper (Cu)	0.4	0.6
Manganese (Mn)	1.2	1.65

The company has seven different raw materials in stock that may be used for the production of this s teel. The following Table lists the grades, available amounts and prices for all raw materials.

Raw material	C %	Cu %	Mn %	Availability in t	Cost in €/t
Iron alloy 1	2.5	0	1.3	400	200
Iron alloy 2	3	0	0.8	300	250
Iron alloy 3	0	0.3	0	600	150
Copper alloy 1	0	90	0	500	220
Copper alloy 2	0	96	4	200	240
Aluminum alloy 1	0	0.4	1.2	300	200
Aluminum alloy 2	0	0.6	0	250	165

The objective is to determine the composition of the steel that minimizes the production cost.

Production d'alliage

The company Steel has received an order for 500 tons of steel to be used in shipbuilding. This steel must have the following characteristics

Chemical element	Minimum grade	Maximum grade
Carbon (C)	2	3
Copper (Cu)	0.4	0.6
Manganese (Mn)	1.2	1.65

The company has seven different raw materials in stock that may be used for the production of this s teel. The following Table lists the grades, available amounts and prices for all raw materials.

Raw material	C %	Cu %	Mn %	Availability in t	Cost in €/t
Iron alloy 1	2.5	0	1.3	400	200
Iron alloy 2	3	0	0.8	300	250
Iron alloy 3	0	0.3	0	600	150
Copper alloy 1	0	90	0	500	220
Copper alloy 2	0	96	4	200	240
Aluminum alloy 1	0	0.4	1.2	300	200
Aluminum alloy 2	0	0.6	0	250	165

The objective is to determine the composition of the steel that minimizes the production cost.

Production d'alliage

The company Steel has received an order for 500 tons of steel to be used in shipbuilding. This steel must have the following characteristics

Chemical element	Minimum grade	Maximum grade
Carbon (C)	2	3
Copper (Cu)	0.4	0.6
Manganese (Mn)	1.2	1.65

The company has seven different raw materials in stock that may be used for the production of this s teel. The following Table lists the grades, available amounts and prices for all raw materials.

Raw material	C %	Cu %	Mn %	Availability in t	Cost in €/t
Iron alloy 1	2.5	0	1.3	400	200
Iron alloy 2	3	0	0.8	300	250
Iron alloy 3	0	0.3	0	600	150
Copper alloy 1	0	90	0	500	220
Copper alloy 2	0	96	4	200	240
Aluminum alloy 1	0	0.4	1.2	300	200
Aluminum alloy 2	0	0.6	0	250	165

The objective is to determine the composition of the steel that minimizes the production cost.

Formulation du problème

Choix des variables de décision

use_i : quantité d'alliage i utilisée ($i \in I$)

Objectif à optimiser

$$\min \sum_{i \in I} prix_i \; use_i$$

Contraintes

Carbone : $LB_C \leq \sum_{i \in I} C_i \; use_i \leq UB_C$
Cuivre : $LB_{Cu} \leq \sum_{i \in I} Cu_i \; use_i \leq UB_{Cu}$
Manganèse :$LB_{Mn} \leq \sum_{i \in I} Mn_i \; use_i \leq UB_{Mn}$
Disponibilité : $0 \leq \text{use}_i \leq Stock_i$
Production : $\sum_{i \in I} use_i = Demand$

Formulation du problème

Choix des variables de décision

use_i : quantité d'alliage i utilisée ($i \in I$)

Objectif à optimiser

$$\min \sum_{i \in I} prix_i \; use_i$$

Contraintes

Carbone : $LB_C \leq \sum_{i \in I} C_i \; use_i \leq UB_C$
Cuivre : $LB_{Cu} \leq \sum_{i \in I} Cu_i \; use_i \leq UB_{Cu}$
Manganèse : $LB_{Mn} \leq \sum_{i \in I} Mn_i \; use_i \leq UB_{Mn}$
Disponibilité : $0 \leq \mathrm{use}_i \leq Stock_i$
Production : $\sum_{i \in I} use_i = Demand$

Formulation du problème

Choix des variables de décision

use_i : quantité d'alliage i utilisée ($i \in I$)

Objectif à optimiser

$$\min \sum_{i \in I} prix_i \; use_i$$

Contraintes

Carbone : $LB_C \leq \sum_{i \in I} C_i \; use_i \leq UB_C$
Cuivre : $LB_{Cu} \leq \sum_{i \in I} Cu_i \; use_i \leq UB_{Cu}$
Manganèse : $LB_{Mn} \leq \sum_{i \in I} Mn_i \; use_i \leq UB_{Mn}$
Disponibilité : $0 \leq \text{use}_i \leq Stock_i$
Production : $\sum_{i \in I} use_i = Demand$

Formulation du problème

Choix des variables de décision

use_i : quantité d'alliage i utilisée ($i \in I$)

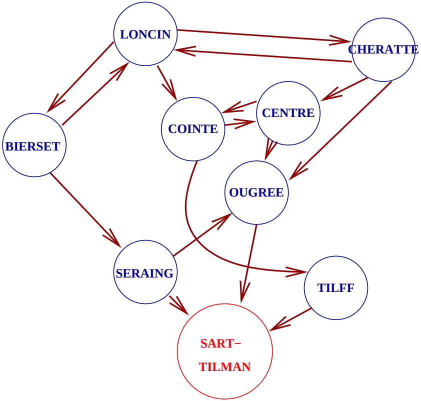
Objectif à optimiser

$$\min \sum_{i \in I} prix_i \ use_i$$

Contraintes

Carbone : $LB_C \leq \sum_{i \in I} C_i \ use_i \leq UB_C$
Cuivre : $LB_{Cu} \leq \sum_{i \in I} Cu_i \ use_i \leq UB_{Cu}$
Manganèse :$LB_{Mn} \leq \sum_{i \in I} Mn_i \ use_i \leq UB_{Mn}$
Disponibilité : $0 \leq \text{use}_i \leq Stock_i$
Production : $\sum_{i \in I} use_i = Demand$

Problème de gestion du trafic

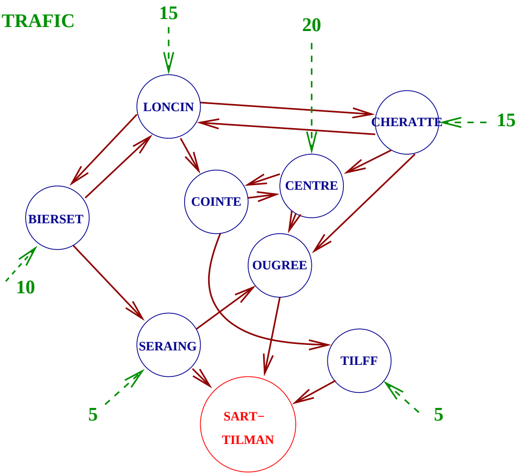


Questions :

Quelle est la capacité totale du réseau ?

Quelles routes sont saturées ? Quelles nouvelles routes faut-il construire ?

Problème de gestion du trafic

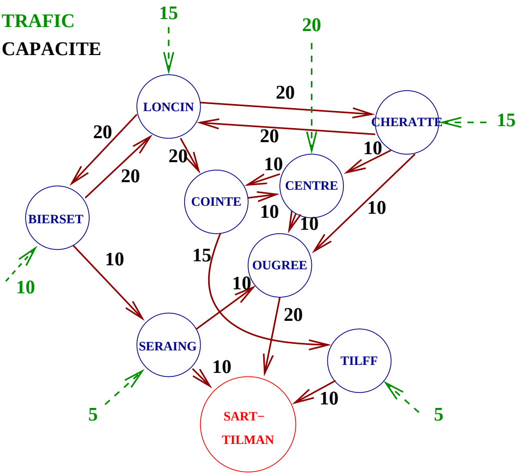


Questions :

Quelle est la capacité totale du réseau ?

Quelles routes sont saturées ? Quelles nouvelles routes faut-il construire ?

Problème de gestion du trafic

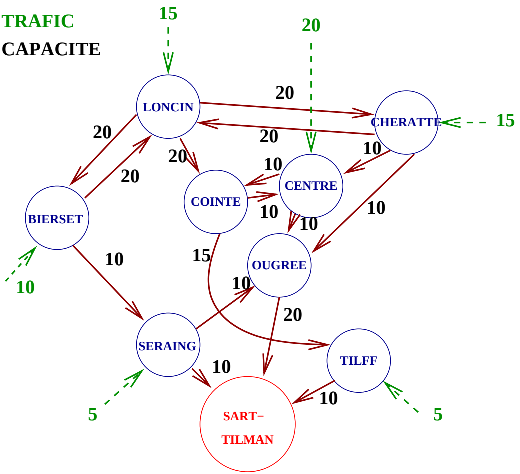


Questions :

Quelle est la capacité totale du réseau ?

Quelles routes sont saturées ? Quelles nouvelles routes faut-il construire ?

Problème de gestion du trafic

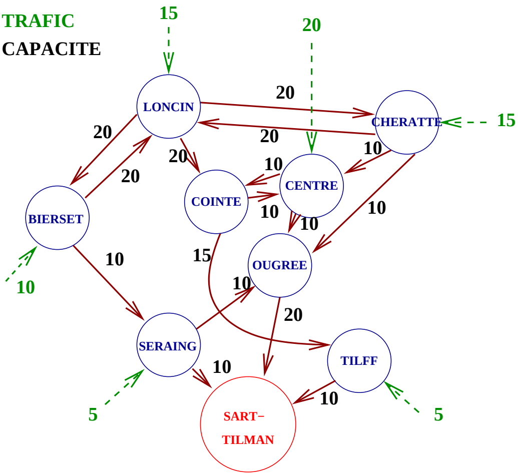


Questions :

Quelle est la capacité totale du réseau ?

Quelles routes sont saturées ? Quelles nouvelles routes faut-il construire ?

Problème de gestion du trafic



Questions :
Quelle est la capacité totale du réseau ?
Quelles routes sont saturées ? Quelles nouvelles routes faut-il construire ?

Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $e = (i, j)$ reliant le noeud i au noeud j.

Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $e = (i, j)$ reliant le noeud i au noeud j.

Les noeuds d'un graphe

Les noeuds et les arêtes d'un graphe

Un graphe dirigé ou digraphe

Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $e = (i, j)$ reliant le noeud i au noeud j.

Les noeuds d'un graphe

Les noeuds et les arêtes d'un graphe

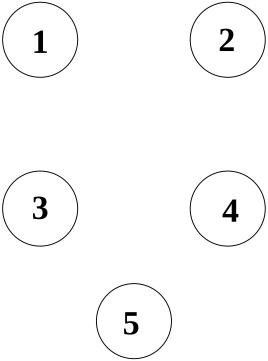
Un graphe dirigé ou digraphe

Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $e = (i, j)$ reliant le noeud i au noeud j.



Les noeuds d'un graphe

Les noeuds et les arêtes d'un graphe

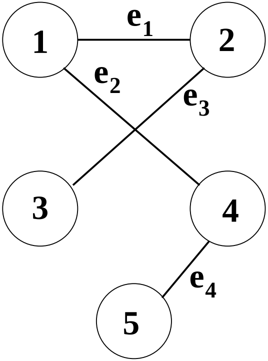
Un graphe dirigé ou digraphe

Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $e = (i, j)$ reliant le noeud i au noeud j.



Les noeuds d'un graphe

Les noeuds et les arêtes d'un graphe

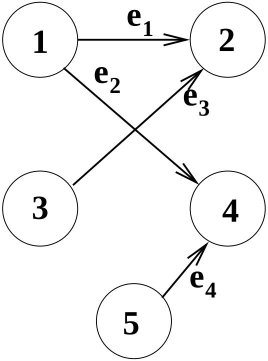
Un graphe dirigé ou digraphe

Problème de flot maximum

Le problème précédent peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe dirigé.

Définition d'un graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $e = (i, j)$ reliant le noeud i au noeud j.



Les noeuds d'un graphe

Les noeuds et les arêtes d'un graphe

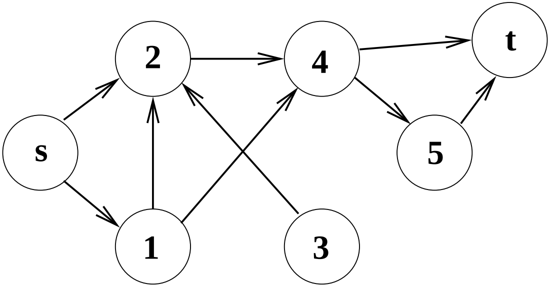
Un graphe dirigé ou digraphe

Problème de flot maximum

Faire passer le flot maximum d'un noeud s (source) à un noeud t (sink).

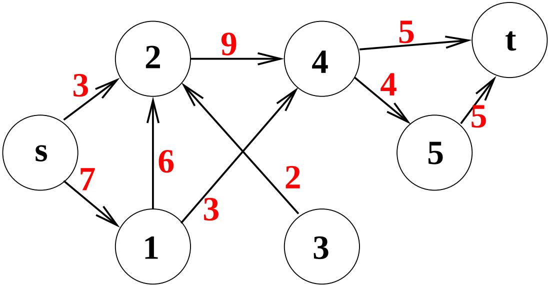
Chaque arête a une certaine capacité

Exemple d'un flot réalisable



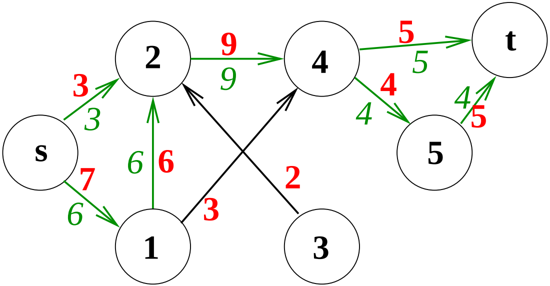
Problème de flot maximum

Faire passer le flot maximum d'un noeud s (source) à un noeud t (sink).
Chaque arête a une certaine capacité
Exemple d'un flot réalisable



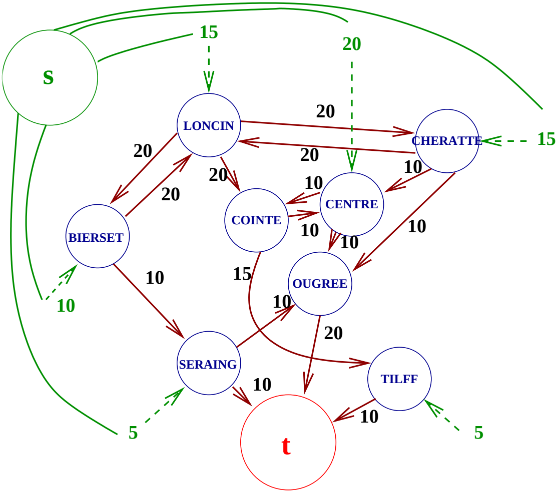
Problème de flot maximum

Faire passer le flot maximum d'un noeud s (source) à un noeud t (sink).
Chaque arête a une certaine capacité
Exemple d'un flot réalisable



Retour à Liège...

Peut être vu comme un problème de flot maximum dans un graphe !



Formulation algébrique

Il existe de très bons algorithmes combinatoires pour résoudre le problème de flot maximum.

On peut aussi modéliser par un programme mathématique

Variables de décision

x_{ij} = flot dans l'arête reliant le noeud i au noeud j (si existante)

Objectif à optimiser

$$\max \sum_{i \in \delta^+(s)} x_{si}$$

Contraintes

Pour tout noeud i (autre que s ou t), on nécessite la conservation du flot :

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{l \in \delta^-(i)} x_{li} \qquad \text{pour tout } i \neq s, t.$$

Borne sur les arêtes : $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ où u est la capacité

Formulation algébrique

Il existe de très bons algorithmes combinatoires pour résoudre le problème de flot maximum.

On peut aussi modéliser par un programme mathématique

Variables de décision

x_{ij} = flot dans l'arête reliant le noeud i au noeud j (si existante)

Objectif à optimiser

$$\max \sum_{i \in \delta^+(s)} x_{si}$$

Contraintes

Pour tout noeud i (autre que s ou t), on nécessite la conservation du flot :

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{l \in \delta^-(i)} x_{li} \qquad \text{pour tout } i \neq s, t.$$

Borne sur les arêtes : $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ où u est la capacité

Formulation algébrique

Il existe de très bons algorithmes combinatoires pour résoudre le problème de flot maximum.

On peut aussi modéliser par un programme mathématique

Variables de décision

x_{ij} = flot dans l'arête reliant le noeud i au noeud j (si existante)

Objectif à optimiser

$$\max \sum_{i \in \delta^+(s)} x_{si}$$

Contraintes

Pour tout noeud i (autre que s ou t), on nécessite la conservation du flot :

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{l \in \delta^-(i)} x_{li} \qquad \text{pour tout } i \neq s, t.$$

Borne sur les arêtes : $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ où u est la capacité

Formulation algébrique

Il existe de très bons algorithmes combinatoires pour résoudre le problème de flot maximum.

On peut aussi modéliser par un programme mathématique

Variables de décision

x_{ij} = flot dans l'arête reliant le noeud i au noeud j (si existante)

Objectif à optimiser

$$\max \sum_{i \in \delta^+(s)} x_{si}$$

Contraintes

Pour tout noeud i (autre que s ou t), on nécessite la conservation du flot :

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{l \in \delta^-(i)} x_{li} \qquad \text{pour tout } i \neq s, t.$$

Borne sur les arêtes : $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ où u est la capacité

Formulation algébrique

Il existe de très bons algorithmes combinatoires pour résoudre le problème de flot maximum.

On peut aussi modéliser par un programme mathématique

Variables de décision

x_{ij} = flot dans l'arête reliant le noeud i au noeud j (si existante)

Objectif à optimiser

$$\max \sum_{i \in \delta^+(s)} x_{si}$$

Contraintes

Pour tout noeud i (autre que s ou t), on nécessite la conservation du flot :

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \sum_{l \in \delta^-(i)} x_{li} \qquad \text{pour tout } i \neq s, t.$$

Borne sur les arêtes : $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ où u est la capacité

Différentes formes de programmes linéaires

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & x_1 \ge 0, \\ & -3 \le x_2 \le 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t. } & 7x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Objectif : min ou max

Contraintes : $\ge, \le, =$

Bornes : $\ge 0, \le 0, [l, u], \mathbb{R}$

Différentes formes de programmes linéaires

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & x_1 \ge 0, \\ & -3 \le x_2 \le 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t. } & 7x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Objectif : min ou max

Contraintes : $\geq, \leq, =$

Bornes : $\geq 0, \leq 0, [l, u], \mathbb{R}$

Différentes formes de programmes linéaires

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, \\ & -3 \leq x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t. } & 7x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Objectif : min ou max

Contraintes : $\geq, \leq, =$

Bornes : $\geq 0, \leq 0, [l, u], \mathbb{R}$

Différentes formes de programmes linéaires

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, \\ & -3 \leq x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t. } & 7x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Objectif : min ou max

Contraintes : $\geq, \leq, =$

Bornes : $\geq 0, \leq 0, [l, u], \mathbb{R}$

Différentes formes de programmes linéaires

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } & 3x_1 + 4x_2 \geq 3 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, \\ & -3 \leq x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t. } & 7x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Objectif : min ou max
Contraintes : $\geq, \leq, =$
Bornes : $\geq 0, \leq 0, [l, u], \mathbb{R}$

Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

Objectif :

$$\max\ f(x) \equiv -\min\ -f(x)$$

$$\max\ 2x_1 - 7x_2 \equiv -\min -2x_1 + 7x_2$$

Contraintes :

$$f(x) \le b \equiv -f(x) \ge -b \qquad 2x_1 - x_2 \le 1 \equiv -2x_1 + x_2 \ge -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \le b \text{ et } f(x) \ge b \qquad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \le 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \ge 3$$

$$f(x) \le b \equiv f(x) + s = b,\ \text{avec } s \ge 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 \ge 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \ge 0 \text{ avec } s \ge 0$$

Bornes :

$$x \le 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \ \text{ et } \ \hat{x} \ge 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \ \text{ et } \ y^+, y^- \ge 0 \text{ !Pas d'équival !}$$

Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

Objectif :

$$\max\ f(x) \equiv -\min\ -f(x)$$

$$\max\ 2x_1 - 7x_2 \equiv -\min -2x_1 + 7x_2$$

Contraintes :

$$f(x) \leq b \equiv -f(x) \geq -b \qquad 2x_1 - x_2 \leq 1 \equiv -2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \leq b \text{ et } f(x) \geq b \qquad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \leq 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \geq 3$$

$$f(x) \leq b \equiv f(x) + s = b,\ \text{avec } s \geq 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \geq 0 \text{ avec } s \geq 0$$

Bornes :

$$x \leq 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \ \text{ et } \ \hat{x} \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \ \text{ et } \ y^+, y^- \geq 0 \text{ !Pas d'équival !}$$

Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

Objectif :

$$\max\ f(x) \equiv -\min\ -f(x)$$

$$\max\ 2x_1 - 7x_2 \equiv -\min -2x_1 + 7x_2$$

Contraintes :

$$f(x) \leq b \equiv -f(x) \geq -b \qquad 2x_1 - x_2 \leq 1 \equiv -2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \leq b \text{ et } f(x) \geq b \qquad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \leq 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \geq 3$$

$$f(x) \leq b \equiv f(x) + s = b, \text{ avec } s \geq 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \geq 0 \text{ avec } s \geq 0$$

Bornes :

$$x \leq 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \text{ et } \hat{x} \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \text{ et } y^+, y^- \geq 0 \text{ !Pas d'équival !}$$

Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

Objectif :

$$\max\ f(x) \equiv -\min\ -f(x)$$

$$\max\ 2x_1 - 7x_2 \equiv -\min -2x_1 + 7x_2$$

Contraintes :

$$f(x) \leq b \equiv -f(x) \geq -b \qquad 2x_1 - x_2 \leq 1 \equiv -2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \leq b \text{ et } f(x) \geq b \qquad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \leq 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \geq 3$$

$$f(x) \leq b \equiv f(x) + s = b,\ \text{avec } s \geq 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \geq 0 \text{ avec } s \geq 0$$

Bornes :

$$x \leq 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \ \text{ et } \ \hat{x} \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \ \text{ et } \ y^+, y^- \geq 0 \text{ !Pas d'équival !}$$

Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

Objectif :

$$\max\ f(x) \equiv -\min\ -f(x)$$

$$\max\ 2x_1 - 7x_2 \equiv -\min -2x_1 + 7x_2$$

Contraintes :

$$f(x) \leq b \equiv -f(x) \geq -b \qquad 2x_1 - x_2 \leq 1 \equiv -2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \leq b \text{ et } f(x) \geq b \qquad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \leq 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \geq 3$$

$$f(x) \leq b \equiv f(x) + s = b,\ \text{avec } s \geq 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \geq 0 \text{ avec } s \geq 0$$

Bornes :

$$x \leq 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \ \text{ et } \ \hat{x} \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \ \text{ et } \ y^+, y^- \geq 0 \text{ !Pas d'équival !}$$

Différentes formes de programmes linéaires

On peut passer de manière équivalente d'une forme à l'autre.

Objectif :

$$\max\ f(x) \equiv -\min\ -f(x)$$

$$\max\ 2x_1 - 7x_2 \equiv -\min -2x_1 + 7x_2$$

Contraintes :

$$f(x) \leq b \equiv -f(x) \geq -b \qquad 2x_1 - x_2 \leq 1 \equiv -2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$f(x) = b \equiv f(x) \leq b \text{ et } f(x) \geq b \qquad 3x_1 - x_2 = 3 \equiv 3x_1 - x_2 \leq 3 \text{ et } 3x_1 - x_2 \geq 3$$

$$f(x) \leq b \equiv f(x) + s = b,\ \text{avec } s \geq 0 \qquad 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \equiv 3x_1 - 2x_2 - s \geq 0 \text{ avec } s \geq 0$$

Bornes :

$$x \leq 0 \quad \equiv \quad \hat{x} := -x \ \text{ et } \ \hat{x} \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad y = y^+ - y^- \ \text{ et } \ y^+, y^- \geq 0 \text{ !Pas d'équival !}$$

Forme standard

La forme standard consiste en

- Objectif : minimisation
- Contraintes : égalités
- Bornes : Variables positives

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

Exercice : Réduire un problème donné à la forme standard

Forme standard

La forme standard consiste en

- Objectif : minimisation
- Contraintes : égalités
- Bornes : Variables positives

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

Exercice : Réduire un problème donné à la forme standard

Forme standard

La forme standard consiste en

- Objectif : minimisation
- Contraintes : égalités
- Bornes : Variables positives

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^T x \\
\text{s.t. } & Ax = b \\
& x \in \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}
$$

Exercice : Réduire un problème donné à la forme standard

Forme standard

La forme standard consiste en

- Objectif : minimisation
- Contraintes : égalités
- Bornes : Variables positives

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{aligned}$$

Exercice : Réduire un problème donné à la forme standard

Représentation graphique

On peut représenter graphiquement un problème en deux dimensions.

Exemple :

$$\max \; x_1 + 2x_2 \tag{1}$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 1 \tag{2}$$

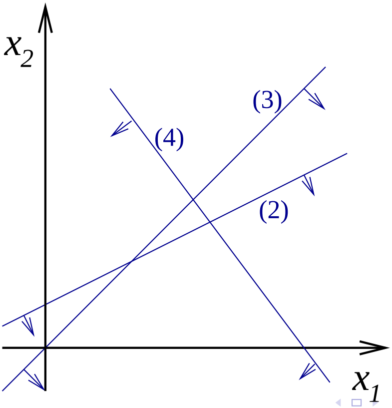
$$-x_1 + x_2 \leq 0 \tag{3}$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \tag{4}$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0 \tag{5}$$

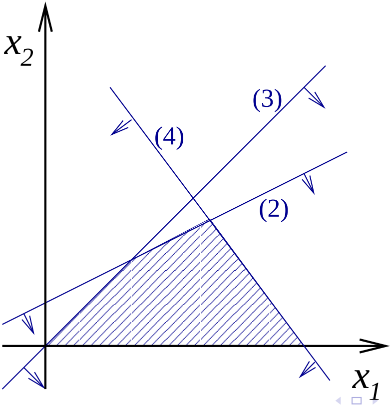
Représentation graphique

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 && (1)\\
& -x_1 + 2x_2 \le 1 && (2)\\
& -x_1 + x_2 \le 0 && (3)\\
& 4x_1 + 3x_2 \le 12 && (4)\\
& x_1,\ x_2 \ge 0 && (5)
\end{aligned}
$$



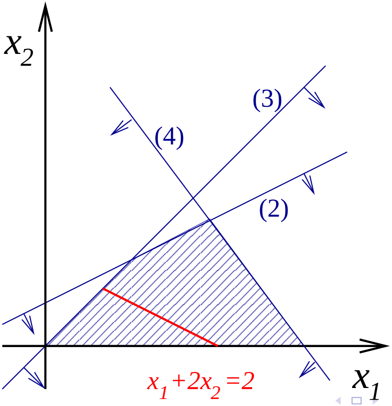
Représentation graphique

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 && (1)\\
& -x_1 + 2x_2 \leq 1 && (2)\\
& -x_1 + x_2 \leq 0 && (3)\\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 12 && (4)\\
& x_1,\ x_2 \geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$



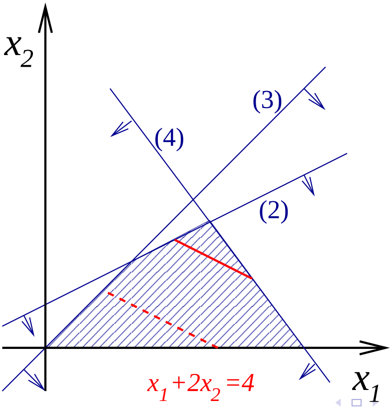
Représentation graphique

$$\max \; x_1 + 2x_2 \tag{1}$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 1 \tag{2}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0 \tag{3}$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \tag{4}$$
$$x_1, \quad x_2 \geq 0 \tag{5}$$



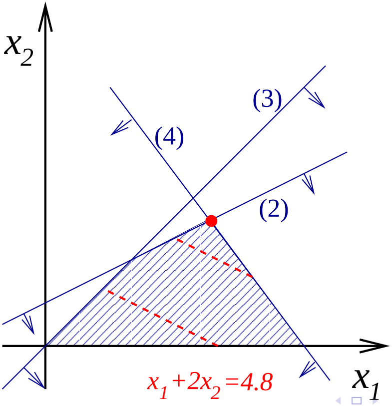
Représentation graphique

$$
\begin{aligned}
\max\ x_1 + 2x_2 & & (1)\\
-x_1 + 2x_2 &\leq 1 & (2)\\
-x_1 + x_2 &\leq 0 & (3)\\
4x_1 + 3x_2 &\leq 12 & (4)\\
x_1,\quad x_2 &\geq 0 & (5)
\end{aligned}
$$



Représentation graphique

$$\max \; x_1 + 2x_2 \tag{1}$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 1 \tag{2}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0 \tag{3}$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \tag{4}$$
$$x_1, \quad x_2 \geq 0 \tag{5}$$



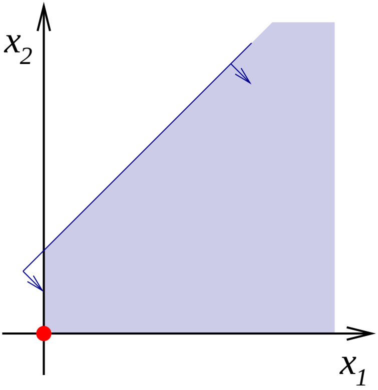
Cas dégénerés

Dans l'exemple, on avait une solution unique à un sommet du polyèdre.
Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.

Cas dégénerés

Dans l'exemple, on avait une solution unique à un sommet du polyèdre.
Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.

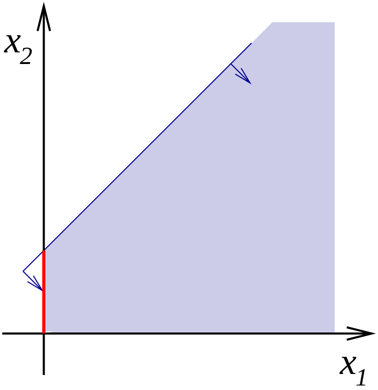
$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Cas dégénerés

Dans l'exemple, on avait une solution unique à un sommet du polyèdre.
Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.

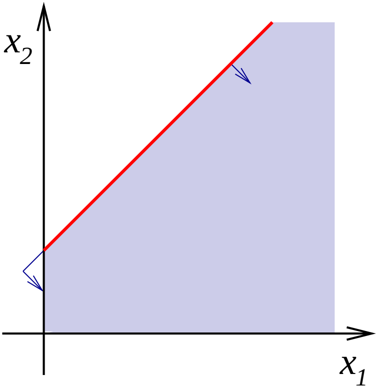
$$\begin{aligned} &\min x_1 \\ &\text{s.t. } -x_1 + x_2 \leq 1 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Cas dégénerés

Dans l'exemple, on avait une solution unique à un sommet du polyèdre.
Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.

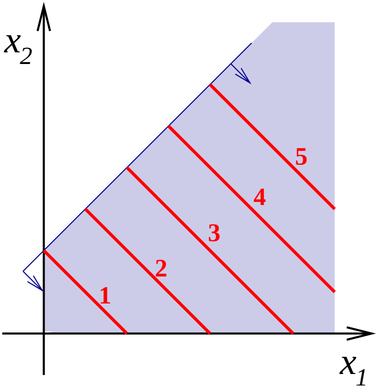
$$\begin{aligned} \max \ & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Cas dégénerés

Dans l'exemple, on avait une solution unique à un sommet du polyèdre.
Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.

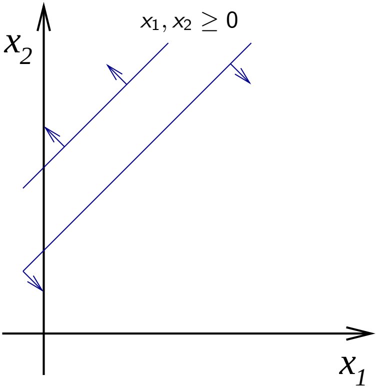
$$\max x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \ -x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Cas dégénerés

Dans l'exemple, on avait une solution unique à un sommet du polyèdre.
Certains cas dégénérés peuvent mener à différentes solutions.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Polyèdres

Définition

Un polyèdre est un ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$

Un ensemble de la forme $Ax \leq b$ est aussi un polyèdre.
Un ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ est un polyèdre en représentation standard.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ est un hyperplan

(b) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$ est un demi-espace

Polyèdres

Définition

Un polyèdre est un ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$

Un ensemble de la forme $Ax \leq b$ est aussi un polyèdre.
Un ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ est un polyèdre en représentation standard.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ est un hyperplan

(b) L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$ est un demi-espace

Ensembles convexes

Définition

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

Définition

Soient $x^1, \ldots, x^k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(i) $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ est une combinaison conique si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$

(ii) $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ est une combinaison convexe si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$

(iii) L'enveloppe convexe de $x^1, \ldots, x^k$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de $x^1, \ldots, x^k$.

Théorème

(a) L'intersection de deux ensembles convexes est convexe

(b) Tout polyèdre est convexe

(c) L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est un polyèdre.

Ensembles convexes

Définition

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.

Définition

Soient $x^1, \ldots, x^k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(i) $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ est une combinaison conique si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$

(ii) $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ est une combinaison convexe si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$

(iii) L'enveloppe convexe de $x^1, \ldots, x^k$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de $x^1, \ldots, x^k$.

Théorème

(a) L'intersection de deux ensembles convexes est convexe

(b) Tout polyèdre est convexe

(c) L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est un polyèdre.

Ensembles convexes

Définition

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout $x, y \in S$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$.

Définition

Soient $x^1, \ldots, x^k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

(i) $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ est une combinaison conique si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$

(ii) $\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k$ est une combinaison convexe si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$

(iii) L'enveloppe convexe de $x^1, \ldots, x^k$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de $x^1, \ldots, x^k$.

Théorème

(a) L'intersection de deux ensembles convexes est convexe

(b) Tout polyèdre est convexe

(c) L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est un polyèdre.

Points extrêmes et sommets

Définition

Soit P un polyèdre. Un point $x \in P$ est un point extrême de P s'il n'existe pas deux points $y, z \in P$ tels que x soit une combinaison convexe de y et z.

Définition

Soit P un polyèdre. Un point $x \in P$ est un sommet de P si il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que $c^T x < c^T y$ pour tout $y \in P$ et $y \neq x$.

Points extrêmes et sommets

Définition

Soit P un polyèdre. Un point $x \in P$ est un point extrême de P s'il n'existe pas deux points $y, z \in P$ tels que x soit une combinaison convexe de y et z.

Définition

Soit P un polyèdre. Un point $x \in P$ est un sommet de P si il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que $c^T x < c^T y$ pour tout $y \in P$ et $y \neq x$.

Bases d'un polyèdre

On considère les différentes égalités et inégalités en trois catégories :

$$
\begin{aligned}
a_i^T x &\geq b_i & i &\in M_{\geq} \\
a_i^T x &\leq b_i & i &\in M_{\leq} \\
a_i^T x &= b_i & i &\in M_{=}
\end{aligned}
$$

Définition

Si un point $\bar{x}$ satisfait $a_i^T \bar{x} = b_i$ pour un certain $i \in M_{\geq}, M_{\leq}$ ou $M_{=}$, on dit que la contrainte i est active ou serrée.

Théorème

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit I l'ensemble des contraintes qui sont actives en $\bar{x}$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe n vecteurs linéairement indépendants dans $\{a_i | i \in I\}$

(ii) $\text{span}\{a_i | i \in I\} = \mathbb{R}^n$

(iii) Le système $a_i^T x = b_i$, $i \in I$ a une solution unique.

Bases d'un polyèdre

On considère les différentes égalités et inégalités en trois catégories :

$$
\begin{aligned}
a_i^T x &\geq b_i & \quad i &\in M_{\geq} \\
a_i^T x &\leq b_i & \quad i &\in M_{\leq} \\
a_i^T x &= b_i & \quad i &\in M_{=}
\end{aligned}
$$

Définition

Si un point $\bar{x}$ satisfait $a_i^T \bar{x} = b_i$ pour un certain $i \in M_{\geq}, M_{\leq}$ ou $M_{=}$, on dit que la contrainte i est active ou serrée.

Théorème

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit I l'ensemble des contraintes qui sont actives en $\bar{x}$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe n vecteurs linéairement indépendants dans $\{a_i | i \in I\}$

(ii) $\text{span}\{a_i | i \in I\} = \mathbb{R}^n$

(iii) Le système $a_i^T x = b_i$, $i \in I$ a une solution unique.

Bases d'un polyèdre

Définition

Soit P un polyèdre et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) $\bar{x}$ est une solution de base si
- toutes les égalités ($i \in M_=$) sont actives
- parmi les contraintes actives, il y en a n qui sont linéairement indépendantes

(b) si $\bar{x}$ est une solution de base qui qui satisfait toutes les contraintes, alo rs $\bar{x}$ est une solution de base réalisable.

Théorème

Soit P un polyèdre et soit $\bar{x} \in P$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) $\bar{x}$ est un sommet

(ii) $\bar{x}$ est un point extrême

(iii) $\bar{x}$ est une solution de base réalisable

Bases d'un polyèdre

Définition

Soit P un polyèdre et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) $\bar{x}$ est une solution de base si
- toutes les égalités ($i \in M_=$) sont actives
- parmi les contraintes actives, il y en a n qui sont linéairement indépendantes

(b) si $\bar{x}$ est une solution de base qui qui satisfait toutes les contraintes, alo rs $\bar{x}$ est une solution de base réalisable.

Théorème

Soit P un polyèdre et soit $\bar{x} \in P$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) $\bar{x}$ est un sommet

(ii) $\bar{x}$ est un point extrême

(iii) $\bar{x}$ est une solution de base réalisable

Polyèdres en représentation standard

On considère $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$.
On considère que les lignes de A sont linéairement indépendantes.

Théorème

Un point $\bar{x}$ est une solution de base si $A\bar{x} = b$ et si il existe m indices $B(1), \ldots, B(m)$ tels que

(i) Les colonnes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ sont linéairement indépendantes
(ii) Si $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, alors $x_i = 0$

Explication :

$$\begin{array}{c} m \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \begin{array}{c} = \\ \geq \end{array} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $n + m$ contraintes et n variables.
Une solution de base $\Rightarrow$ n contraintes satisfaites avec égalité.
Les m égalités sont d'office satisfaites.
Il y a $n - m$ inégalités $x_i \geq 0$ qui sont actives (les variables hors base).
Il y m inégalités $x_i \geq 0$ qui sont éventuellement non actives (variables de base).

Polyèdres en représentation standard

On considère $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$.
On considère que les lignes de A sont linéairement indépendantes.

Théorème

Un point $\bar{x}$ est une solution de base si $A\bar{x} = b$ et si il existe m indices $B(1), \ldots, B(m)$ tels que

(i) Les colonnes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ sont linéairement indépendantes

(ii) Si $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, alors $x_i = 0$

Explication :

$$\begin{array}{c} m \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \begin{array}{c} = \\ \geq \end{array} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $n + m$ contraintes et n variables.
Une solution de base $\Rightarrow$ n contraintes satisfaites avec égalité.
Les m égalités sont d'office satisfaites.
Il y a $n - m$ inégalités $x_i \geq 0$ qui sont actives (les variables hors base).
Il y m inégalités $x_i \geq 0$ qui sont éventuellement non actives (variables de base).

Polyèdres en représentation standard

On considère $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$.
On considère que les lignes de A sont linéairement indépendantes.

Théorème

Un point $\bar{x}$ est une solution de base si $A\bar{x} = b$ et si il existe m indices $B(1), \ldots, B(m)$ tels que

(i) Les colonnes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ sont linéairement indépendantes

(ii) Si $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, alors $x_i = 0$

Explication :

$$\begin{array}{c} m \text{ lignes} \\ n \text{ lignes} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} x \begin{array}{c} = \\ \geq \end{array} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $n + m$ contraintes et n variables.
Une solution de base $\Rightarrow$ n contraintes satisfaites avec égalité.
Les m égalités sont d'office satisfaites.
Il y a $n - m$ inégalités $x_i \geq 0$ qui sont actives (les variables hors base).
Il y m inégalités $x_i \geq 0$ qui sont éventuellement non actives (variables de base).

Construction d'une base

Procédure ($\neq$ Algorithme)

(i) Choisir m colonnes linéairement indépendantes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$

(ii) $x_i = 0$ pour tout $i \neq B(1), \ldots, B(m)$

(iii) Résoudre $Ax = b$ pour les inconnues $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$

Si la solution $x \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.
On construit la matrice de base comme

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \end{pmatrix}$$

La matrice hors base N correspond aux indices hors base.
Le vecteur de base est $x_B = (x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)})$ et le vecteur hors base correspond aux autres indices.
On a

$$\begin{aligned} Bx_B &= b \\ x_N &= 0 \\ Bx_B + Nx_n &= b \end{aligned}$$

Exemple

Construction d'une base

Procédure ($\neq$ Algorithme)

(i) Choisir m colonnes linéairement indépendantes $A_{B(1)}, \dots, A_{B(m)}$

(ii) $x_i = 0$ pour tout $i \neq B(1), \dots, B(m)$

(iii) Résoudre $Ax = b$ pour les inconnues $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$

Si la solution $x \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.

On construit la matrice de base comme

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \end{pmatrix}$$

La matrice hors base N correspond aux indices hors base.

Le vecteur de base est $x_B = (x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)})$ et le vecteur hors base correspond aux autres indices.

On a

$$\begin{aligned} Bx_B &= b \\ x_N &= 0 \\ Bx_B + Nx_n &= b \end{aligned}$$

Exemple

Construction d'une base

Procédure ($\neq$ Algorithme)

(i) Choisir m colonnes linéairement indépendantes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$

(ii) $x_i = 0$ pour tout $i \neq B(1), \ldots, B(m)$

(iii) Résoudre $Ax = b$ pour les inconnues $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$

Si la solution $x \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.
On construit la matrice de base comme

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \end{pmatrix}$$

La matrice hors base N correspond aux indices hors base.
Le vecteur de base est $x_B = (x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)})$ et le vecteur hors base correspond aux autres indices.
On a

$$\begin{aligned} Bx_B &= b \\ x_N &= 0 \\ Bx_B + Nx_n &= b \end{aligned}$$

Exemple

Construction d'une base

Procédure ($\neq$ Algorithme)

(i) Choisir m colonnes linéairement indépendantes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$

(ii) $x_i = 0$ pour tout $i \neq B(1), \ldots, B(m)$

(iii) Résoudre $Ax = b$ pour les inconnues $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$

Si la solution $x \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.
On construit la matrice de base comme

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \end{pmatrix}$$

La matrice hors base N correspond aux indices hors base.
Le vecteur de base est $x_B = (x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)})$ et le vecteur hors base correspond aux autres indices.
On a

$$\begin{aligned} Bx_B &= b \\ x_N &= 0 \\ Bx_B + Nx_n &= b \end{aligned}$$

Exemple

Construction d'une base

Procédure ($\neq$ Algorithme)

(i) Choisir m colonnes linéairement indépendantes $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$

(ii) $x_i = 0$ pour tout $i \neq B(1), \ldots, B(m)$

(iii) Résoudre $Ax = b$ pour les inconnues $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$

Si la solution $x \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.
On construit la matrice de base comme

$$B = \begin{pmatrix} A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \end{pmatrix}$$

La matrice hors base N correspond aux indices hors base.
Le vecteur de base est $x_B = (x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)})$ et le vecteur hors base correspond aux autres indices.
On a

$$\begin{aligned} Bx_B &= b \\ x_N &= 0 \\ Bx_B + Nx_n &= b \end{aligned}$$

Exemple

Quelques remarques importantes

Correspondance entre la base et la solution de base

Deux bases différentes peuvent mener à la même solution x.

Bases adjacentes

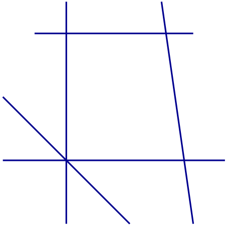
Deux bases sont adjacentes si elles ne diffèrent que d'un indice.

Vu autrement, elles ont $n-1$ indices en commun !

Quelques remarques importantes

Correspondance entre la base et la solution de base

Deux bases différentes peuvent mener à la même solution x.



Bases adjacentes

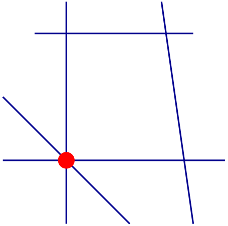
Deux bases sont adjacentes si elles ne diffèrent que d'un indice.

Vu autrement, elles ont $n - 1$ indices en commun !

Quelques remarques importantes

Correspondance entre la base et la solution de base

Deux bases différentes peuvent mener à la même solution x.



Bases adjacentes

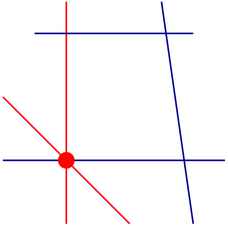
Deux bases sont adjacentes si elles ne diffèrent que d'un indice.

Vu autrement, elles ont $n-1$ indices en commun !

Quelques remarques importantes

Correspondance entre la base et la solution de base

Deux bases différentes peuvent mener à la même solution x.



Bases adjacentes

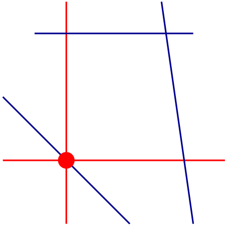
Deux bases sont adjacentes si elles ne diffèrent que d'un indice.

Vu autrement, elles ont $n-1$ indices en commun !

Quelques remarques importantes

Correspondance entre la base et la solution de base

Deux bases différentes peuvent mener à la même solution x.



Bases adjacentes

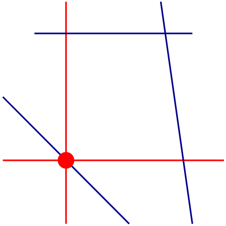
Deux bases sont adjacentes si elles ne diffèrent que d'un indice.

Vu autrement, elles ont $n-1$ indices en commun !

Quelques remarques importantes

Correspondance entre la base et la solution de base

Deux bases différentes peuvent mener à la même solution x.



Bases adjacentes

Deux bases sont adjacentes si elles ne diffèrent que d'un indice.

Vu autrement, elles ont $n-1$ indices en commun !

Dégénérescence

Définition

Une solution de base $x \in \mathbb{R}^n$ est dégénérée si plus que n contraintes sont actives à la solution.

Dégénérescence dans le cas standard

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Une solution de base x est dégénérée si x a plus de $n - m$ éléments nuls.

Remarque : La dégénérescence peut dépendre de la représentation !
Une base non dégénérée peut être dégénérée sous une autre forme et inversement.
Example :

Dégénérescence

Définition

Une solution de base $x \in \mathbb{R}^n$ est dégénérée si plus que n contraintes sont actives à la solution.

Dégénérescence dans le cas standard

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Une solution de base x est dégénérée si x a plus de $n - m$ éléments nuls.

Remarque : La dégénérescence peut dépendre de la représentation !

Une base non dégénérée peut être dégénérée sous une autre forme et inversement.

Example :

Dégénérescence

Définition

Une solution de base $x \in \mathbb{R}^n$ est dégénérée si plus que n contraintes sont actives à la solution.

Dégénérescence dans le cas standard

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Une solution de base x est dégénérée si x a plus de $n - m$ éléments nuls.

Remarque : La dégénérescence peut dépendre de la représentation !
Une base non dégénérée peut être dégénérée sous une autre forme et inversement.
Example :

Existence de points extrêmes

Définition

A polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ **contient une ligne** s'il existe $x \in P$ et un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + \lambda d \in P$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soit un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ non-vide. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) P a au moins un point extrême

(ii) P ne contient pas de ligne

(iii) Il existe n vecteurs a_i linéairement indépendants

Corollaire

Tout polyèdre **borné** admet au moins un point extrême.
Tout polyèdre en format standard admet au moins un point extrême.

Existence de points extrêmes

Définition

A polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ contient une ligne s'il existe $x \in P$ et un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + \lambda d \in P$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soit un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ non-vide. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) P a au moins un point extrême

(ii) P ne contient pas de ligne

(iii) Il existe n vecteurs a_i linéairement indépendants

Corollaire

Tout polyèdre borné admet au moins un point extrême.
Tout polyèdre en format standard admet au moins un point extrême.

Existence de points extrêmes

Définition

A polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ contient une ligne s'il existe $x \in P$ et un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + \lambda d \in P$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soit un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T x \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ non-vide. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) P a au moins un point extrême

(ii) P ne contient pas de ligne

(iii) Il existe n vecteurs a_i linéairement indépendants

Corollaire

Tout polyèdre borné admet au moins un point extrême.
Tout polyèdre en format standard admet au moins un point extrême.

Les points extrêmes sont les candidats *points optimaux*

Théorème

Soit le problème

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } x \in P.$$

Si P a au moins un point extrême et qu'il existe une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est un point extrême.

Généralisation du théorème précédent : soit la solution optimale est $-\infty$ soit il existe un point extrême qui est une solution optimale.

Théorème

Si P a au moins un point extrême, le problème

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } x \in P.$$

a, soit $+\infty$ comme valeur optimale, soit il existe un point extrême qui est optimal.

Les points extrêmes sont les candidats *points optimaux*

Théorème

Soit le problème

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } x \in P.$$

Si P a au moins un point extrême et qu'il existe une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est un point extrême.

Généralisation du théorème précédent : soit la solution optimale est $-\infty$ soit il existe un point extrême qui est une solution optimale.

Théorème

Si P a au moins un point extrême, le problème

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } x \in P.$$

a, soit $+\infty$ comme valeur optimale, soit il existe un point extrême qui est optimal.

Représentation des polyèdres

Théorème fondamental de Minkowski-Weyl

Tout polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ peut être représenté comme

$$P = \text{conv}\{v^1, \ldots, v^p\} + \text{cone}\{r^1, \ldots, r^q\}.$$

Les v^i sont les points extrêmes.
Les r^j sont les rayons extrêmes.
De manière équivalente,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_p v^p + \mu_1 r^1 + \cdots + \mu_q r^q \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1 \\ \lambda_i, \mu_j \geq 0 \text{ pour tout } i, j. \}$$

Représentation des polyèdres

Théorème fondamental de Minkowski-Weyl

Tout polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ peut être représenté comme

$$P = \text{conv}\{v^1, \dots, v^p\} + \text{cone}\{r^1, \dots, r^q\}.$$

Les v^i sont les points extrêmes.
Les r^j sont les rayons extrêmes.
De manière équivalente,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_p v^p + \mu_1 r^1 + \cdots + \mu_q r^q$$
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$$
$$\lambda_i, \mu_j \geq 0 \text{ pour tout } i, j. \qquad \}$$

Représentation des polyèdres

Théorème fondamental de Minkowski-Weyl

Tout polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ peut être représenté comme

$$P = \text{conv}\{v^1, \ldots, v^p\} + \text{cone}\{r^1, \ldots, r^q\}.$$

Les v^i sont les points extrêmes.
Les r^j sont les rayons extrêmes.
De manière équivalente,

$$\begin{aligned} P = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_p v^p + \mu_1 r^1 + \cdots + \mu_q r^q \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1 \\ \lambda_i, \mu_j \geq 0 \text{ pour tout } i, j. \qquad \} \end{aligned}$$