

# Chapitre 5

## Résolution d'équations différentielles ordinaires

## Définition d'un problème aux valeurs initiales

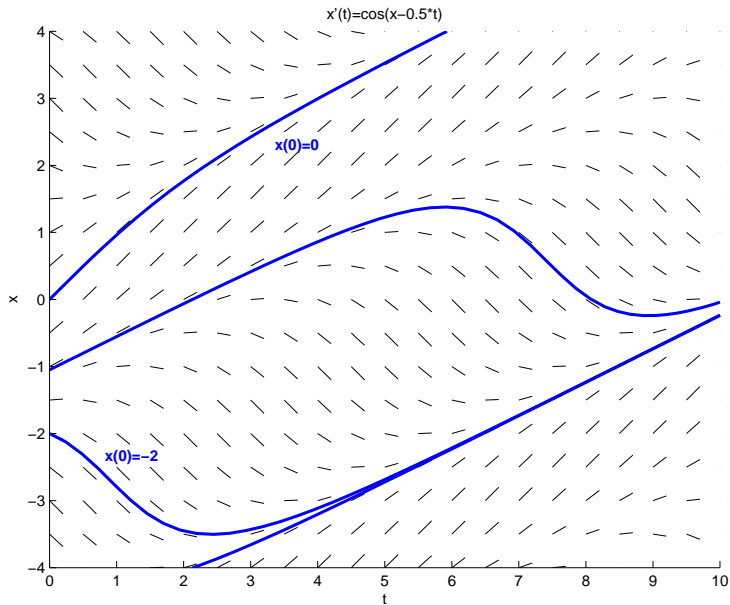
### Equation différentielle ordinaire avec condition initiale

Trouver une fonction  $x(t)$  dont la **dérivée** est fonction du temps  $t$  et de la fonction  $x(t)$  elle-même :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- Sans condition initiale : déterminé à **une constante près**
- Avec condition initiale : déterminé **de manière unique**

## Le champ de vecteurs d'une équation différentielle ordinaire



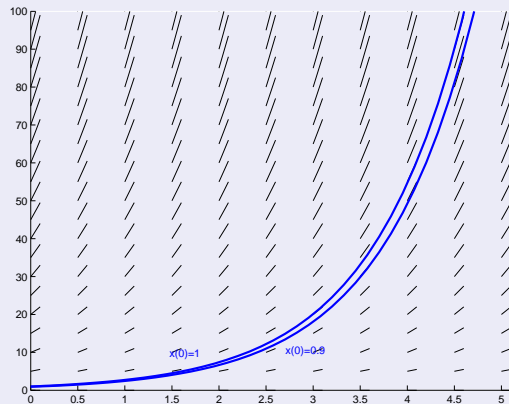
## Stabilité d'une équation différentielle

Qu'implique une **petite perturbation** de la **condition initiale** pour ma solution ?

Une équation différentielle instable

$$x'(t) = x(t)$$

$$x(0) = 1$$



## Pourquoi une EDO instable est-elle problématique ?

- On va résoudre l'équation en **approximant** la fonction  $x(t)$  en des **temps discrets**  $t_0, t_1, t_2, \dots$  et en obtenant  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$
- En chaque temps  $t_i$ , une petite erreur va s'introduire. On aura

$$\bar{x}_i = x(t_i) + \epsilon_i$$

- A l'itération suivante, on résout

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = \bar{x}_i + \epsilon_i \end{cases}$$

au lieu de

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = x(t_i). \end{cases}$$

- Si l'équation est instable, la petite erreur commise **va s'amplifier au cours des itérations.**

## Pourquoi une EDO instable est-elle problématique ?

- On va résoudre l'équation en **approximant** la fonction  $x(t)$  en des **temps discrets**  $t_0, t_1, t_2, \dots$  et en obtenant  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$
- En chaque temps  $t_i$ , une petite erreur va s'introduire. On aura

$$\bar{x}_i = x(t_i) + \epsilon_i$$

- A l'itération suivante, on résout

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = \bar{x}_i + \epsilon_i \end{cases}$$

au lieu de

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = x(t_i). \end{cases}$$

- Si l'équation est instable, la petite erreur commise **va s'amplifier au cours des itérations.**

## Pourquoi une EDO instable est-elle problématique ?

- On va résoudre l'équation en **approximant** la fonction  $x(t)$  en des **temps discrets**  $t_0, t_1, t_2, \dots$  et en obtenant  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$
- En chaque temps  $t_i$ , une petite erreur va s'introduire. On aura

$$\bar{x}_i = x(t_i) + \epsilon_i$$

- A l'itération suivante, on résout

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = x(t_i) + \epsilon_i \end{cases}$$

au lieu de

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = x(t_i). \end{cases}$$

- Si l'équation est instable, la petite erreur commise **va s'amplifier au cours des itérations.**

## Pourquoi une EDO instable est-elle problématique ?

- On va résoudre l'équation en **approximant** la fonction  $x(t)$  en des **temps discrets**  $t_0, t_1, t_2, \dots$  et en obtenant  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$
- En chaque temps  $t_i$ , une petite erreur va s'introduire. On aura

$$\bar{x}_i = x(t_i) + \epsilon_i$$

- A l'itération suivante, on résout

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = x(t_i) + \epsilon_i \end{cases}$$

au lieu de

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t) \\ x(t_i) = x(t_i). \end{cases}$$

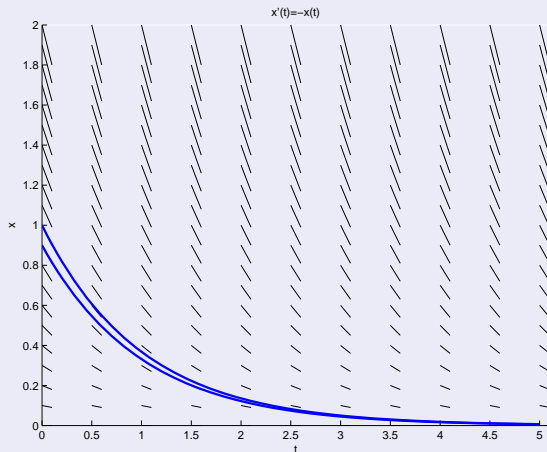
- Si l'équation est instable, la petite erreur commise **va s'amplifier au cours des itérations.**

# Stabilité d'une équation différentielle

## Une équation différentielle stable

$$x'(t) = -x(t)$$

$$x(0) = 1$$





# Comment déterminer la stabilité d'une EDO ?

## Définition

Une équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

est

- **stable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) < 0$
- **instable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) > 0$ .

## Proposition

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 - \epsilon \quad (**)$$

et solutions  $x^*$  et  $x^{**}$  respectivement. On a

$$e(t) \approx \epsilon \exp \left( \int_{t_0}^t J(x(s), s) ds \right).$$

# Comment déterminer la stabilité d'une EDO ?

## Définition

Une équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

est

- **stable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) < 0$
- **instable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) > 0$ .

## Proposition

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 - \epsilon \quad (**)$$

et solutions  $x^*$  et  $x^{**}$  respectivement. On a

$$e(t) \approx \epsilon \exp \left( \int_{t_0}^t J(x(s), s) ds \right).$$

# Comment déterminer la stabilité d'une EDO ?

## Définition

Une équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

est

- **stable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) < 0$
- **instable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) > 0$ .

## Proposition

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 - \epsilon \quad (**)$$

et solutions  $x^*$  et  $x^{**}$  respectivement. On a

$$e(t) \approx \epsilon \exp \left( \int_{t_0}^t J(x(s), s) ds \right).$$

# Comment déterminer la stabilité d'une EDO ?

## Définition

Une équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

est

- **stable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) < 0$
- **instable** en  $(x(t), t)$  si son **Jacobien**  $J(x(t), t) = \frac{\partial f(x(t), t)}{\partial x}(x(t), t) > 0$ .

## Proposition

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0 - \epsilon \quad (**)$$

et solutions  $x^*$  et  $x^{**}$  respectivement. On a

$$e(t) \approx \epsilon \exp \left( \int_{t_0}^t J(x(s), s) ds \right).$$

# Méthodes de résolution numérique des équations différentielles ordinaires

## Idée

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

Pour résoudre, on part de  $\bar{x}_0 := x_0$  et

$$\bar{x}_{i-1} = \bar{x}_i + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x^{[3]}(t_i) + \dots,$$

où  $h := t_{i+1} - t_i$ .

## Méthode d'Euler explicite

On tronque le développement de Taylor au **premier ordre**.

Comme  $x'(t_i) = f(x(t_i), t_i)$ , on a

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i)$$

## Idée

$$x'(t) = f(x(t), t)$$

Pour résoudre, on part de  $\bar{x}_0 := x_0$  et

$$\bar{x}_{i-1} = \bar{x}_i + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x^{[3]}(t_i) + \dots,$$

où  $h := t_{i+1} - t_i$ .

## Méthode d'Euler explicite

On tronque le développement de Taylor au **premier ordre**.

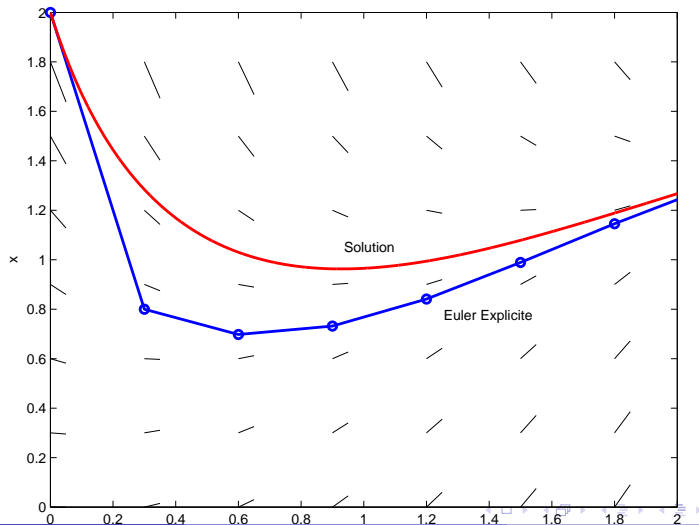
Comme  $x'(t_i) = f(x(t_i), t_i)$ , on a

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i)$$

# Méthode d'Euler explicite

$$x'(t) = -x^2(t) + t$$

$$x(0) = 2.$$



## Analyse de l'erreur de la méthode d'Euler explicite

### Proposition

L'erreur globale commise à chaque pas peut être décomposée comme

$$EG_i = (1 + hJ_i)EG_{i-1} + EL_i.$$

- $EG =$  erreur globale,  $EL =$  erreur locale
- $J_i = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_i, t_i)$
- $EL_i = -\frac{h^2}{2}x''(\xi_i)$
- $\zeta_i$  est compris entre  $\bar{x}_{i-1}$  et  $x^*(t_{i-1})$
- $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$

### Région de stabilité de la méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite est stable si l'on choisit un pas  $h$  tel que

$$-2 < hJ_i < 0 \quad \text{pour tout } i$$

- La méthode peut être stable pour une équation stable
- La méthode n'est jamais stable pour une équation instable

## Analyse de l'erreur de la méthode d'Euler explicite

### Proposition

L'erreur globale commise à chaque pas peut être décomposée comme

$$EG_i = (1 + hJ_i)EG_{i-1} + EL_i.$$

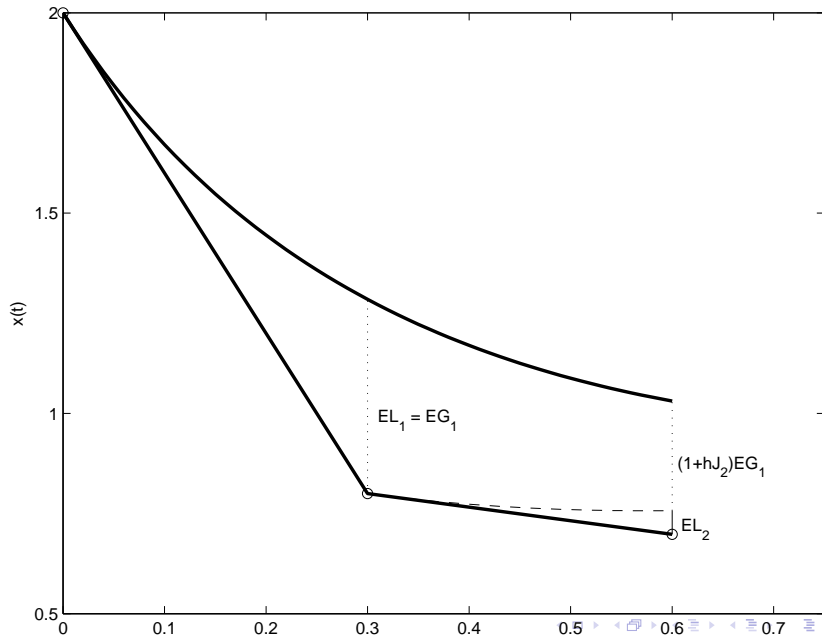
### Région de stabilité de la méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite est stable si l'on choisit un pas  $h$  tel que

$$-2 < hJ_i < 0 \quad \text{pour tout } i$$

- La méthode peut être stable pour une équation stable
- La méthode n'est jamais stable pour une équation instable
- Le pas doit être très petit pour une équation très stable

## Analyse de l'erreur de la méthode d'Euler explicite



# Méthodes de Taylor d'ordre supérieur

## Principe

Utiliser un développement d'ordre supérieur

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x^{[3]}(t_i) + \dots$$

**Problème** : trouver les dérivées de  $x$  d'ordre supérieur

## Dérivée d'ordre 2

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i) &= \frac{df}{dt}(x(t_i), t_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)x'(t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)f(x(t_i), t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i)\end{aligned}$$

## Méthode d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, t_i)f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}_i, t_i)\right)$$

# Méthodes de Taylor d'ordre supérieur

## Principe

Utiliser un développement d'ordre supérieur

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x^{[3]}(t_i) + \dots$$

**Problème** : trouver les dérivées de  $x$  d'ordre supérieur

## Dérivée d'ordre 2

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}(t_i) &= \frac{df}{dt}(x(t_i), t_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)x'(t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)f(x(t_i), t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \end{aligned}$$

## Méthode d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, t_i)f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}_i, t_i)\right)$$

# Méthodes de Taylor d'ordre supérieur

## Principe

Utiliser un développement d'ordre supérieur

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x^{[3]}(t_i) + \dots$$

**Problème** : trouver les dérivées de  $x$  d'ordre supérieur

## Dérivée d'ordre 2

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}(t_i) &= \frac{df}{dt}(x(t_i), t_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)x'(t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i)f(x(t_i), t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i)\end{aligned}$$

## Méthode d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, t_i)f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}_i, t_i)\right)$$

# Méthodes de Taylor d'ordre supérieur

## Dérivée d'ordre 3

$$\begin{aligned}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i) f(x(t_i), t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f\end{aligned}$$

## Méthode d'ordre 3

$$\begin{aligned}\bar{x}_{i+1} &= \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, t_i) f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}_i, t_i) \right) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f \right) (\bar{x}_i, t_i)\end{aligned}$$

## Commentaires sur les méthodes de Taylor

- Nécessité de connaître la forme analytique et phase de dérivation symbolique très lourde
- En pratique, seule la méthode d'ordre 1 est utilisée

# Méthodes de Taylor d'ordre supérieur

## Dérivée d'ordre 3

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^3}(t_i) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i) f(x(t_i), t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f \end{aligned}$$

## Méthode d'ordre 3

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i+1} &= \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, t_i) f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}_i, t_i) \right) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f \right) (\bar{x}_i, t_i) \end{aligned}$$

## Commentaires sur les méthodes de Taylor

- Nécessité de connaître la forme analytique et phase de dérivation symbolique très lourde
- En pratique, seule la méthode d'ordre 1 est utilisée

## Méthodes de Taylor d'ordre supérieur

### Dérivée d'ordre 3

$$\begin{aligned}\frac{d^3x}{dt^3}(t_i) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_i), t_i) f(x(t_i), t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(x(t_i), t_i) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f\end{aligned}$$

### Méthode d'ordre 3

$$\begin{aligned}\bar{x}_{i+1} &= \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, t_i) f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}_i, t_i) \right) + \\ &+ \frac{h^3}{3!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 f \right) (\bar{x}_i, t_i)\end{aligned}$$

### Commentaires sur les méthodes de Taylor

- Nécessité de **connaître la forme analytique** et phase de **dérivation symbolique** très lourde
- En pratique, seule la méthode d'ordre 1 est utilisée

## Extension de la méthode d'Euler

Idée : écrire le développement de Taylor en  $x(t_{i+1})$

### Méthode d'Euler implicite

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(x_{i+1}, t_{i+1})$$

Il faut résoudre une équation non linéaire à chaque itération !

Intérêt de la méthode d'Euler implicite : la région de stabilité

La méthode d'Euler implicite est stable pour un choix de pas tel que

$$\left| \frac{1}{1 - hJ_i} \right| < 1 \quad \text{pour tout } i$$

- Stable pour tout choix de pas quand l'équation est stable
- Problème : nécessité d'utiliser une méthode numérique pour résoudre l'équation non linéaire

## Extension de la méthode d'Euler

Idée : écrire le développement de Taylor en  $x(t_{i+1})$

### Méthode d'Euler implicite

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(x_{i+1}, t_{i+1})$$

Il faut résoudre une équation non linéaire à chaque itération !

### Intérêt de la méthode d'Euler implicite : la région de stabilité

La méthode d'Euler implicite est stable pour un choix de pas tel que

$$\left| \frac{1}{1 - hJ_i} \right| < 1 \quad \text{pour tout } i$$

- Stable pour **tout choix de pas** quand l'**équation est stable**
- Problème : nécessité d'utiliser une méthode numérique pour résoudre l'équation non linéaire

# Méthodes de Runge-Kutta

Idée : approximer numériquement le calcul fastidieux des dérivées des méthodes de Taylor

## Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i + \frac{h}{2}f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h}{2}f(\bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i), t_{i+1})$$

Explication :

$$F_1 = f(x(t), t)$$

$$F_2 = f(x(t) + \beta hf(x(t), t), t + \alpha h)$$

$$x(t + h) \approx x(t) + w_1 h F_1 + w_2 h F_2$$

# Méthodes de Runge-Kutta

Idée : approximer numériquement le calcul fastidieux des dérivées des méthodes de Taylor

## Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i + \frac{h}{2}f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h}{2}f(\bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i), t_{i+1})$$

**Explication :**

$$F_1 = f(x(t), t)$$

$$F_2 = f(x(t) + \beta hf(x(t), t), t + \alpha h)$$

$$x(t + h) \approx x(t) + w_1 h F_1 + w_2 h F_2$$

## Méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$$

où

$$K_1 = hf(\bar{x}_i, t_i)$$

$$K_2 = hf\left(\bar{x}_i + \frac{1}{2}K_1, t_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$K_3 = hf\left(\bar{x}_i + \frac{1}{2}K_2, t_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$K_4 = hf(\bar{x}_i + K_3, t_i + h).$$

Copie tous les termes du développement de Taylor jusqu'à l'ordre 4.  
Le terme d'erreur est en  $\mathcal{O}(h^5)$ .

## Choix du pas et méthodes adaptatives

- Question cruciale : comment choisir le pas afin d'obtenir une précision suffisante ?

- **Prédicteur 1** : méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas  $h$  :  $\bar{x}_{i+1}^{[1]}$

- **Prédicteur 2** : méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas  $\frac{h}{2}$  :  $\bar{x}_{i+1}^{[2]}$

Si  $|\bar{x}_{i+1}^{[2]} - \bar{x}_{i+1}^{[1]}|$  **petit**  $\rightarrow$  pas  $h$  suffisant

Si  $|\bar{x}_{i+1}^{[2]} - \bar{x}_{i+1}^{[1]}|$  **pas suffisamment petit**  $\rightarrow$  réduire le pas !

Avec méthode classique d'ordre 4 : **11 évaluations de fonction**

- Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg :  
se servir de la **flexibilité** des méthodes de Runge-Kutta pour  
avoir 2 approximations  $\bar{x}_{i+1}^{[1]}$ ,  $\bar{x}_{i+1}^{[2]}$  et  
réduire le nombre d'évaluations de fonctions

## Choix du pas et méthodes adaptatives

- Question cruciale : comment choisir le pas afin d'obtenir une précision suffisante ?
  - **Prédicteur 1** : méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas  $h$  :  $\bar{x}_{i+1}^{[1]}$
  - **Prédicteur 2** : méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec pas  $\frac{h}{2}$  :  $\bar{x}_{i+1}^{[2]}$
  - Si  $|\bar{x}_{i+1}^{[2]} - \bar{x}_{i+1}^{[1]}|$  **petit**  $\rightarrow$  pas  $h$  suffisant
  - Si  $|\bar{x}_{i+1}^{[2]} - \bar{x}_{i+1}^{[1]}|$  **pas suffisamment petit**  $\rightarrow$  réduire le pas !
- Avec méthode classique d'ordre 4 : **11 évaluations de fonction**
- Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg :  
se servir de la **flexibilité** des méthodes de Runge-Kutta pour  
**avoir 2 approximations**  $\bar{x}_{i+1}^{[1]}$ ,  $\bar{x}_{i+1}^{[2]}$  et  
**réduire le nombre d'évaluations de fonctions**

## Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg

$$K_1 = hf(\bar{x}_i, t_i)$$

$$K_2 = hf(\bar{x}_i + \frac{1}{4}K_1, t_i + \frac{1}{4}h)$$

$$K_3 = hf(\bar{x}_i + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2, t_i + \frac{3}{8}h)$$

$$K_4 = hf(\bar{x}_i + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3, t_i + \frac{12}{13}h)$$

$$K_5 = hf(\bar{x}_i + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4, t_i + h)$$

$$K_6 = hf(\bar{x}_i - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5, t_i + \frac{1}{2}h)$$

On obtient deux approximations de  $x(t+h)$ , à savoir

$$\bar{x}_{i+1}^{[4]} = x(t) + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$

$$\bar{x}_{i+1}^{[5]} = x(t) + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6$$

Evaluer  $|\bar{x}_{i+1}^{[5]} - \bar{x}_{i+1}^{[4]}|$  pour estimer la taille du pas.

Implémenté dans matlab dans ode45 : paire de Dormand-Prince

## Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg

$$K_1 = hf(\bar{x}_i, t_i)$$

$$K_2 = hf(\bar{x}_i + \frac{1}{4}K_1, t_i + \frac{1}{4}h)$$

$$K_3 = hf(\bar{x}_i + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2, t_i + \frac{3}{8}h)$$

$$K_4 = hf(\bar{x}_i + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3, t_i + \frac{12}{13}h)$$

$$K_5 = hf(\bar{x}_i + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4, t_i + h)$$

$$K_6 = hf(\bar{x}_i - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5, t_i + \frac{1}{2}h)$$

On obtient deux approximations de  $x(t+h)$ , à savoir

$$\bar{x}_{i+1}^{[4]} = x(t) + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$

$$\bar{x}_{i+1}^{[5]} = x(t) + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6$$

Evaluer  $|\bar{x}_{i+1}^{[5]} - \bar{x}_{i+1}^{[4]}|$  pour estimer **la taille du pas**.

Implémenté dans `matlab` dans `ode45` : paire de **Dormand-Prince**

## Méthodes de Runge-Kutta-Fehlberg

$$K_1 = hf(\bar{x}_i, t_i)$$

$$K_2 = hf\left(\bar{x}_i + \frac{1}{4}K_1, t_i + \frac{1}{4}h\right)$$

$$K_3 = hf\left(\bar{x}_i + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2, t_i + \frac{3}{8}h\right)$$

$$K_4 = hf\left(\bar{x}_i + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3, t_i + \frac{12}{13}h\right)$$

$$K_5 = hf\left(\bar{x}_i + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4, t_i + h\right)$$

$$K_6 = hf\left(\bar{x}_i - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5, t_i + \frac{1}{2}h\right)$$

On obtient deux approximations de  $x(t+h)$ , à savoir

$$\bar{x}_{i+1}^{[4]} = x(t) + \frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5$$

$$\bar{x}_{i+1}^{[5]} = x(t) + \frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6$$

Evaluer  $|\bar{x}_{i+1}^{[5]} - \bar{x}_{i+1}^{[4]}|$  pour estimer **la taille du pas**.

Implémenté dans `matlab` dans `ode45` : paire de **Dormand-Prince**

# Méthodes à pas liés

- Une méthode est **à pas séparés** si à chaque itération  $i + 1$ , on **ne se sert que de l'information de  $x$  et  $f$  dans  $[t_i, t_{i+1}]$** .  
On recommence à chaque itération le calcul en **ignorant le passé**.  
**Exemples** : Méthodes d'Euler, Runge-Kutta, Runge-Kutta-Fehlberg.
- Une méthode est **à pas liés** si on se sert du **passé du problème** pour en tirer des informations sur **le futur**.
- Avantages des méthodes à pas liés : réduire la quantité de travail à chaque itération

## Forme générique

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + h \sum_{j=-1}^n \beta_j f(\bar{x}_{i-j}, t_{i-j}).$$

- Si  $\beta_{-1} \neq 0 \rightarrow$  méthode **implicite**
- Si  $\beta_{-1} = 0 \rightarrow$  méthode **explicite**

Les coefficients  $\beta$  sont obtenus en intégrant

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(s), s) ds.$$

à partir du polynôme interpolant

$$(\bar{x}_{i-n}, f(\bar{x}_{i-n}, t_{i-n})), \dots, (\bar{x}_i, f(\bar{x}_i, t_i))$$

## Principales méthodes à pas liés

### Adams-Bashforth d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Bashforth d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{12}(5f(\bar{x}_{i-2}, t_{i-2}) - 16f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 23f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Moulton d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

### Adams-Moulton d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 8f(\bar{x}_i, t_i) + 5f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

## Principales méthodes à pas liés

### Adams-Bashforth d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Bashforth d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{12}(5f(\bar{x}_{i-2}, t_{i-2}) - 16f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 23f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Moulton d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

### Adams-Moulton d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 8f(\bar{x}_i, t_i) + 5f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

## Principales méthodes à pas liés

### Adams-Bashforth d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Bashforth d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{12}(5f(\bar{x}_{i-2}, t_{i-2}) - 16f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 23f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Moulton d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

### Adams-Moulton d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 8f(\bar{x}_i, t_i) + 5f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

## Principales méthodes à pas liés

### Adams-Bashforth d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Bashforth d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{12}(5f(\bar{x}_{i-2}, t_{i-2}) - 16f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 23f(\bar{x}_i, t_i))$$

### Adams-Moulton d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

### Adams-Moulton d'ordre 3

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 8f(\bar{x}_i, t_i) + 5f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$

# Méthodes prédicteur-correcteur

- Se servir d'une méthode **explicite** → **prédicteur**
- Utiliser le prédicteur dans la formule d'une méthode **implicite** → **correcteur**
- Si besoin, itérer l'opération.
- Permet également de décider si le pas est adéquat.

Exemple : Méthodes d'ordre 2

$$\text{Prédicteur} \quad \bar{x}_{i+1}^{[1]} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

$$\text{Correcteur} \quad \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}^{[1]}, t_{i+1}))$$

En général, le plus efficace s'avère de n'utiliser le processus prédicteur-correcteur **qu'une seule fois** avant de passer à l'itération  $i + 1$

## Méthodes prédicteur-correcteur

- Se servir d'une méthode **explicite** → **prédicteur**
- Utiliser le prédicteur dans la formule d'une méthode **implicite** → **correcteur**
- Si besoin, itérer l'opération.
- Permet également de décider si le pas est adéquat.

Exemple : Méthodes d'ordre 2

$$\text{Prédicteur} \quad \bar{x}_{i+1}^{[1]} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

$$\text{Correcteur} \quad \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}^{[1]}, t_{i+1}))$$

En général, le plus efficace s'avère de n'utiliser le processus prédicteur-correcteur **qu'une seule fois** avant de passer à l'itération  $i + 1$

# Méthodes prédicteur-correcteur

- Se servir d'une méthode **explicite** → **prédicteur**
- Utiliser le prédicteur dans la formule d'une méthode **implicite** → **correcteur**
- Si besoin, itérer l'opération.
- Permet également de décider si le pas est adéquat.

Exemple : Méthodes d'ordre 2

$$\text{Prédicteur} \quad \bar{x}_{i+1}^{[1]} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

$$\text{Correcteur} \quad \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}^{[1]}, t_{i+1}))$$

En général, le plus efficace s'avère de n'utiliser le processus prédicteur-correcteur **qu'une seule fois** avant de passer à l'itération  $i + 1$

# Systèmes d'équations différentielles ordinaires

- Pas de différence majeure par rapport au cas scalaire
- Il suffit d'appliquer les méthodes vues de manière **vectorielle**
- **Exemple** : Méthode d'Euler explicite :

$$\bar{\underline{x}}_{i+1} = \bar{\underline{x}}_i + hf(\bar{\underline{x}}_i, t_i)$$

## Equations différentielles d'ordre supérieur à un

Elles peuvent se ramener à un **système** du **premier ordre**.

Soit à résoudre

$$x^{[n]}(t) = f(x(t), x'(t), \dots, x^{[n-1]}(t), t)$$

On pose

$$y_0(t) := x(t), y_1(t) := x'(t), y_2(t) := x''(t), \dots, y_{n-1}(t) := x^{[n-1]}(t)$$

et on peut transformer l'équation en un système de 1e ordre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, t) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc  **$n$  conditions initiales**

$$x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{[n-1]}(t_0)$$

## Equations différentielles d'ordre supérieur à un

Elles peuvent se ramener à un **système** du **premier ordre**.

Soit à résoudre

$$x^{[n]}(t) = f(x(t), x'(t), \dots, x^{[n-1]}(t), t)$$

On pose

$$y_0(t) := x(t), y_1(t) := x'(t), y_2(t) := x''(t), \dots, y_{n-1}(t) := x^{[n-1]}(t)$$

et on peut transformer l'équation en un système de 1e ordre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, t) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc  **$n$  conditions initiales**

$$x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{[n-1]}(t_0)$$

## Equations différentielles d'ordre supérieur à un

Elles peuvent se ramener à un **système** du **premier ordre**.

Soit à résoudre

$$x^{[n]}(t) = f(x(t), x'(t), \dots, x^{[n-1]}(t), t)$$

On pose

$$y_0(t) := x(t), y_1(t) := x'(t), y_2(t) := x''(t), \dots, y_{n-1}(t) := x^{[n-1]}(t)$$

et on peut transformer l'équation en un système de 1e ordre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, t) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc  **$n$  conditions initiales**

$$x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{[n-1]}(t_0)$$

## Equations différentielles d'ordre supérieur à un

Elles peuvent se ramener à un **système** du **premier ordre**.

Soit à résoudre

$$x^{[n]}(t) = f(x(t), x'(t), \dots, x^{[n-1]}(t), t)$$

On pose

$$y_0(t) := x(t), y_1(t) := x'(t), y_2(t) := x''(t), \dots, y_{n-1}(t) := x^{[n-1]}(t)$$

et on peut transformer l'équation en un système de 1e ordre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, t) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc  **$n$  conditions initiales**

$$x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{[n-1]}(t_0)$$

## Equations différentielles d'ordre supérieur à un

Elles peuvent se ramener à un **système** du **premier ordre**.

Soit à résoudre

$$x^{[n]}(t) = f(x(t), x'(t), \dots, x^{[n-1]}(t), t)$$

On pose

$$y_0(t) := x(t), y_1(t) := x'(t), y_2(t) := x''(t), \dots, y_{n-1}(t) := x^{[n-1]}(t)$$

et on peut transformer l'équation en un système de 1e ordre

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, t) \end{pmatrix}.$$

Il faut donc  **$n$  conditions initiales**

$$x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{[n-1]}(t_0)$$

## Stabilité et raideur d'un système d'équations différentielles

- Stabilité d'un **système** déterminé par les **valeurs propres** de la matrice Jacobienne

$$J = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

- Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) < 0$  pour tout  $j \rightarrow$  **système stable**
- Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) > 0$  pour un  $j \rightarrow$  **système instable**
- Problème très crucial :  
Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) < 0$  mais si **certaines** valeurs propres **ont des modules très élevés**  $\rightarrow$  **problème raide (stiff)**

# Stabilité et raideur d'un système d'équations différentielles

- Stabilité d'un **système** déterminé par les **valeurs propres** de la matrice Jacobienne

$$J = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

- Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) < 0$  pour tout  $j \rightarrow$  **système stable**
- Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) > 0$  pour un  $j \rightarrow$  **système instable**
- Problème très crucial :  
Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) < 0$  mais si **certaines** valeurs propres ont des modules très élevés  $\rightarrow$  **problème raide (stiff)**

## Stabilité et raideur d'un système d'équations différentielles

- Stabilité d'un **système** déterminé par les **valeurs propres** de la matrice Jacobienne

$$J = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_j(J)) < 0$  pour tout  $j \rightarrow$  **système stable**
- Si  $\operatorname{Re}(\lambda_j(J)) > 0$  pour un  $j \rightarrow$  **système instable**
- Problème très crucial :  
Si  $\operatorname{Re}(\lambda_j(J)) < 0$  mais si **certaines** valeurs propres ont des modules très élevés  $\rightarrow$  **problème raide (stiff)**

## Stabilité et raideur d'un système d'équations différentielles

- Stabilité d'un **système** déterminé par les **valeurs propres** de la matrice Jacobienne

$$J = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

- Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) < 0$  pour tout  $j \rightarrow$  **système stable**
- Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) > 0$  pour un  $j \rightarrow$  **système instable**
- Problème très crucial :  
Si  $\mathcal{R}e(\lambda_j(J)) < 0$  mais si **certaines** valeurs propres **ont des modules très élevés**  $\rightarrow$  **problème raide (stiff)**

## Problèmes raides

Les problèmes raides sont des problèmes très délicats pour les méthodes numériques.

Exemple :

$$\begin{aligned}x' &= -20x - 19y & x(0) &= 2 \\y' &= -19x - 20y & y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Solution analytique :

$$x(t) = e^{-39t} + e^{-t} \quad y(t) = e^{-39t} - e^{-t}.$$

$$\text{Jacobienne} = \begin{pmatrix} -20 & -19 \\ -19 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres} = -39 \text{ et } -1$$

Choix du pas :  $h < 2/39$  et  $h < 2 \Rightarrow h < 2/39$

Partie **négligeable** qui impose **taille très petite du pas**

## Problèmes raides

Les problèmes raides sont des problèmes très délicats pour les méthodes numériques.

Exemple :

$$\begin{aligned}x' &= -20x - 19y & x(0) &= 2 \\y' &= -19x - 20y & y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Solution analytique :

$$x(t) = e^{-39t} + e^{-t} \quad y(t) = e^{-39t} - e^{-t}.$$

$$\text{Jacobienne} = \begin{pmatrix} -20 & -19 \\ -19 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres} = -39 \text{ et } -1$$

Choix du pas :  $h < 2/39$  et  $h < 2 \Rightarrow h < 2/39$

Partie **négligeable** qui impose **taille très petite du pas**

## Problèmes raides

Les problèmes raides sont des problèmes très délicats pour les méthodes numériques.

Exemple :

$$\begin{aligned}x' &= -20x - 19y & x(0) &= 2 \\y' &= -19x - 20y & y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Solution analytique :

$$x(t) = e^{-39t} + e^{-t} \quad y(t) = e^{-39t} - e^{-t}.$$

$$\text{Jacobienne} = \begin{pmatrix} -20 & -19 \\ -19 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres} = -39 \text{ et } -1$$

Choix du pas :  $h < 2/39$  et  $h < 2 \Rightarrow h < 2/39$

Partie **négligeable** qui impose **taille très petite du pas**

## Problèmes raides

Les problèmes raides sont des problèmes très délicats pour les méthodes numériques.

Exemple :

$$\begin{aligned}x' &= -20x - 19y & x(0) &= 2 \\y' &= -19x - 20y & y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Solution analytique :

$$x(t) = e^{-39t} + e^{-t} \quad y(t) = e^{-39t} - e^{-t}.$$

$$\text{Jacobienne} = \begin{pmatrix} -20 & -19 \\ -19 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres} = -39 \text{ et } -1$$

Choix du pas :  $h < 2/39$  et  $h < 2 \Rightarrow h < 2/39$

Partie **négligeable** qui impose **taille très petite du pas**