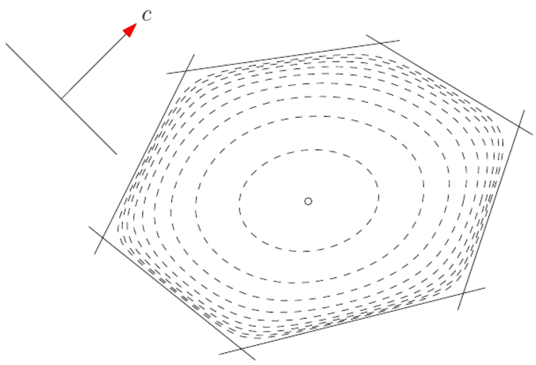
Université de Liège **MATH0461-1**

Optimisation numérique – répétition 8

Méthodes de points intérireurs

7 mai 2009

Question 1. La figure suivante



représente le domaine de faisabilité du programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

comportant deux variables et six contraintes. Sont également illustrés
– le vecteur c,
– le centre analytique et
– quelques courbes de niveau de la fonction barrière $\phi(x) = -\sum_{i=1}^{6} \log(b_i - a_i^T x)$.
Dessinez précisément le chemin central et expliquez votre réponse.

Question 2.

Equations du chemin central.

1. Soit le problème linéaire sous forme duale

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ s.t. & A^T y + s = c \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Décrivez l'équation du chemin central, en caractérisant le maximum de la fonction objectif avec barrière à l'aide de ses conditions d'optimalité.

2. Soit le problème sous forme primale

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

   Même question au sujet du chemin central.

3. Montrez que l'on peut combiner les deux systèmes d'équations obtenus en un seul système.

Question 3.

Propriétés du pas de Newton.

Toutes les méthodes de point intérieur de type primal-dual tentent de résoudre les conditions d'optimalité du chemin central

$$\begin{array}{ll} Ax = b, & \\ A^T y + s = c, & \\ x_i s_i = \mu, & i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

et pour cela utilisent le système suivant pour obtenir la direction du pas de Newton : étant donné l'itéré actuel (x, y, s), supposé strictment admissible ($Ax = b$, $A^T y + s = c$, $x > 0$, $s > 0$) et dont la mesure de dualité $\mu(x, s)$ vaut $(x^T s)/n$, on vise le point du chemin central correspondant à la mesure de dualité $\sigma\mu(x, s)$ (avec $0 \leq \sigma \leq 1$) en résolvant

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -XSe + \sigma\mu(x, s)e \end{pmatrix}$$

où X (resp. S) est la matrice carrée contenant le vecteur x (resp. s) sur la diagonale et e le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. Etant donnée une longueur de pas $\alpha \geq 0$, l'itéré suivant sera égal à

$$(x(\alpha), y(\alpha), s(\alpha)) = (x, y, s) + \alpha\,(\delta x, \delta y, \delta s)\,.$$

En particulier, certaines méthodes utilisent un pas de Newton complet, soit $\alpha = 1$.

1. Montrez que les directions δx et δs sont orthogonales (cette propriété est très utile dans l'analyse des méthodes).
2. Montrez que l'itéré suivant satisfait toujours les contraintes linéaires $Ax = b$ et $A^T y + s = c$.
3. Quelle est la valeur de la mesure de dualité $\mu(\alpha)(= \mu(x(\alpha), y(\alpha)))$ de l'itéré suivant ? Que se passe-t-il dans le cas d'un pas de Newton complet ? Et quand $\alpha = 0$? Et quand $\sigma = 1$?

4. Il est possible de modifier certaines méthodes pour utiliser des points intérieurs ($x > 0$ et $s > 0$) mais plus nécessairement admissibles (donc $Ax = b$ et $A^T + y = s$ ne sont plus forcément satisfaits). Dans ce cas, on résout le système

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_b \\ -r_c \\ -XSe + \sigma\mu e \end{pmatrix}$$

avec les quantités $r_b = Ax - b$ et $r_c = A^T y + s - c$ appelées résidus.
Observez que pour ces méthodes, la propriété d'orthogonalité des directions δx et δs n'est plus vraie. De même, que devient l'expression de la mesure de dualité $\mu(\alpha)$? Ces deux différences compliquent l'analyse des méthodes non-admissibles.

5. Quelles sont les valeurs des résidus r_b et r_c pour l'itéré suivant ? En particulier, que se passe-t-il dans le cas d'un pas de Newton complet ?

Question 4. Exemple de chemin central.

1. Trouvez, sous la forme $y(\mu)$, le chemin central de

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 \\ s.t. \quad & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_1 + y_2 \leq 1. \end{aligned}$$

2. Quel est l'optimum du problème ? Quel est le centre analytique du polyèdre ?
3. Que se passe-t-il si on considère min y_1 comme objectif ?
4. Ecrivez le dual.
5. Déduisez, sans trop de calculs, quelle est l'équation du chemin central dual $x(\mu)$.
6. Vérifiez que le saut de dualité entre $x(\mu)$ et $y(\mu)$ prend sa valeur théorique.