

Optimisation numérique – répétition 4

Dualité

12 mars 2008

Question 1. Écrivez le dual du problème

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_1 - x_2 \\
 \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0 \\
 & 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 3 \\
 & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
 & x_1 \leq 0 \\
 & x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

Question 2. Sans passer par la forme standard, mais en écrivant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la forme du problème dual de

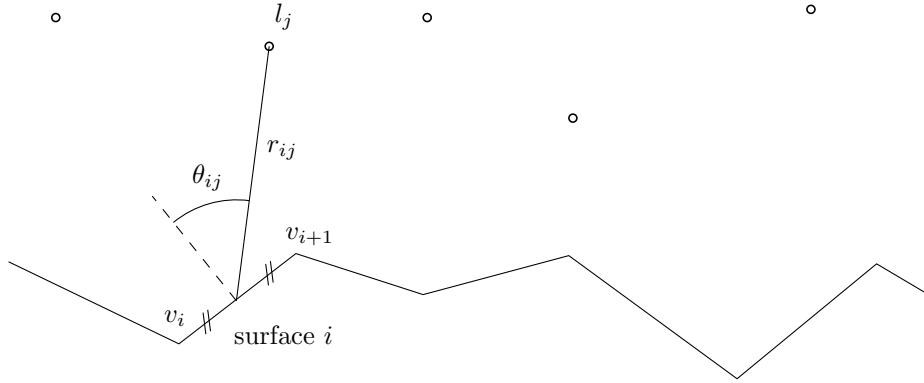
$$\begin{array}{ll}
 \max & c^T x \\
 \text{s.t.} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

Question 3. Soit le PL suivant :

$$\begin{array}{ll}
 \min & 47x_1 + 93x_2 + 17x_3 - 93x_4 \\
 \text{s.t.} & \begin{bmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Prouvez, sans résoudre le problème, que la solution $x = (1, 1, 1, 1)$ est optimale.

Question 4. *Problème d'illumination.* Soit un ensemble de m lampes disposées aux positions $l_1, l_2, \dots, l_m \in \mathbb{R}^2$ qui illuminent n surfaces planes :



La surface i est exprimée par $[v_i, v_{i+1}]$, avec $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^2$. Les variables du problème sont les puissances $p_1, \dots, p_m \in [0, 1]$.

La quantité de lumière qui illumine la surface i est I_i :

$$I_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} p_j, \quad a_{ij} = r_{ij}^{-2} \max\{\cos \theta_{ij}, 0\}.$$

(a) On désire calculer la puissance des lampes pour que le niveau d'illumination de chaque surface soit le plus proche possible d'un niveau donné I_{des} . Si on utilise la fonction

$$\phi(p) = \max_{k=1, \dots, n} |I_k - I_{des}|$$

pour mesurer la déviation par rapport à I_{des} , exprimez le problème sous forme d'un PL.

On désire à présent que la moitié de la puissance totale ne soit pas concentrée dans un sous-ensemble de r lampes :

$$\sum_{i=1}^r p_{[i]} \leq 0.5 \sum_{i=1}^m p_i, \quad (1)$$

où $p_{[i]}$ est la $i^{\text{ème}}$ plus grande composante de p . Le membre de gauche de (1) est une fonction fortement non-linéaire de p . On peut récrire (1) comme un ensemble de d'inégalités linéaires en énumérant tous les sous-ensembles $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ contenant r éléments différents, et en ajoutant une inégalité

$$\sum_{k=1}^r p_{i_k} \leq 0.5 \sum_{i=1}^m p_i$$

pour chaque sous-ensemble. De manière équivalente, on peut récrire (1) comme

$$s^T p \leq 0.5 \sum_{i=1}^m p_i, \quad \forall s \in \{0, 1\}^m : \sum_{i=1}^m s_i = r,$$

ce qui donne un ensemble de C_r^m contraintes.

On peut utiliser la dualité pour dériver une représentation plus compacte. Nous allons prouver que (1) peut s'exprimer par un ensemble de $1 + 2m$ inégalités

$$rt + \sum_{i=1}^m x_i \leq 0.5 \sum_{i=1}^m p_i, \quad p_i \leq t + x_i, \quad i = 1, \dots, m \quad x \geq 0 \quad (2)$$

en $p \in \mathbb{R}^m$, et en les variables auxiliaires $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$.

(b) Étant donné un vecteur $p \in \mathbb{R}^m$, montrez que la somme de ses r plus grands éléments (*i.e.* $p_{[1]} + \dots + p_{[r]}$) est égale à la valeur optimale du PL suivant (la variable est ici $y \in \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T y \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq y \leq \mathbf{1} \\ & \mathbf{1}^T y = r. \end{aligned} \tag{3}$$

(c) Écrivez le dual du problème 3. Montrez qu'il peut s'écrire

$$\begin{aligned} \min \quad & rt + \mathbf{1}^T x \\ \text{s.t.} \quad & t\mathbf{1} + x \geq p \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où les variables sont $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^m$.

(d) Que peut-on dire de la valeur optimale du problème (4) ?

En conclusion, la valeur optimale de (4) est inférieure à $0.5 \sum_{i=1}^m p_i$ ssi il existe une solution réalisable (x, t) de (4) qui vérifie $rt + \mathbf{1}^T x \leq 0.5 \sum_{i=1}^m p_i$. Autrement dit, p vérifie (1) ssi les contraintes (2) en x et t sont réalisables.

(e) Modifiez le problème obtenu en (a) pour inclure la contrainte (1) en tenant compte des résultats obtenus en (b), (c) et (d).

(f) Combien de variables et de contraintes contient le PL dérivé en (e) ?

Question 5. Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice vérifiant les deux propriétés suivantes :

- tous les éléments de P sont non négatifs : $p_{ij} \geq 0$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$,
 - la somme des éléments d'une colonne P_j de P est égale à 1 : $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ pour $j = 1, \dots, n$.
- Prouvez qu'il existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Py = y, \quad y \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 1. \tag{5}$$

Remarque : On peut interpréter P comme la matrice de transition d'une chaîne de Markov à n états. Si $s(t)$ est l'état de la chaîne à l'instant t , p_{ij} est défini comme

$$p_{ij} = \text{prob}(s(t+1) = i | s(t) = j).$$

Soit $y(t) \in \mathbb{R}^n$ la distribution de probabilité de l'état en t ,

$$y_i(t) = \text{prob}(s(t) = i),$$

alors la distribution à l'instant $t+1$ est donnée par $y(t+1) = Py(t)$. Le résultat de ce problème montre qu'une chaîne de Markov dont le nombre d'état est fini a toujours une distribution d'équilibre y .

Question 6. En résolvant le problème

$$\begin{array}{ll}
\min & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.t.} & -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 5
\end{array} \tag{6}$$

par la méthode du simplexe on obtient à la dernière itération le tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	8
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	2

Le vecteur $b = (2, 4, 5)$ de (6) change et devient égal à $b_2 = (7, 3, 0)$. Comment utiliser la solution x^* du problème (6) pour résoudre le nouveau problème ?