Optimisation numérique – répétition 3

Géométrie

25 février 2010

Question 1. [Bertsimas, exercice 2.1] Les ensembles suivants sont-ils des polyèdres ?

1. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0,\ x\cos\theta + y\sin\theta \leq 1,\ \forall\theta \in [0, \pi/2]\}$
2. $S = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 8x + 15 \leq 0\}$
3. L'ensemble vide.

Question 2. Les ensembles suivants sont-ils des polyèdres ? Si c'est possible, exprimez les sous forme d'inégalités (donnez les matrices A et b telles que $S = \{x \mid Ax \leq b\}$) ou sous forme standard ($S = \{x \mid x \geq 0,\ Ax = b\}$).

1. $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$ pour $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}^n$ donnés.
2. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \mathbf{1}^T x = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\}$ pour $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$, $b_1 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$ donnés.
3. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ x^T y \leq 1\ \forall y : \|y\| = 1\}$.
4. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ x^T y \leq 1\ \forall y : \sum_i |y_i| = 1\}$.
5. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \|x - x_1\|\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ sont donnés.
6. $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \|x - x_i\|,\ i = 1, ..., K\}$, $x_0, ..., x_K \in \mathbb{R}^n$ sont donnés.

Question 3. Soit le polyèdre

$$
\begin{aligned}
Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2, && (1)\\
x_2 + 2x_3 &= 2, && (2)\\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 0, && (3)\\
x_2, x_3 &\geq 0\} && (4)
\end{aligned}
$$

Calculer une solution de base réalisable et une solution de base non réalisable.

Question 4. [Juin 2008] Soit le polyèdre $P = \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{cone}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

1. a. Représentez graphiquement le polyèdre P.
2. b. Déterminez une fonction objectif c pour laquelle le problème $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ a une solution optimale qui n'est pas unique.
3. c. Déterminez une fonction objectif c pour laquelle le problème $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ est non borné (*unbounded*).

Question 5. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\text{Max } x_1 + 2x_2$$

$$\text{sous} \begin{cases} -3x_1 & + & 2x_2 & \leq 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq 5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$$