

# INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE

EXAMEN FINAL

10 Août 2009

## Consignes

- Vous disposez de 3 heures 30.
- La Question 1 doit être remise après 1 heure.
- N'oubliez pas de répondre à chaque question sur des feuilles séparées et d'indiquer votre nom sur chaque feuille.
- Veillez à soigneusement justifier vos réponses.
- Vous pouvez uniquement disposer de papier et de matériel pour écrire.
- **Les calculatrices ne sont autorisées qu'une fois la Question 1 reprise.**
- Les téléphones portables doivent rester éteints et hors de portée.
- Le résultat final, même juste, mais sans explication ne vaut pas de point.
- L'explication correcte d'une démarche, même sans calcul, vaut au moins un tiers des points de la question.

Bon travail!

1. (a) Soit  $S$  la spline cubique naturelle interpolant une fonction  $u(x)$  deux fois continûment dérivable aux points  $(x_1, u(x_1)), \dots, (x_n, u(x_n))$ . Prouver que

$$\int_{x_1}^{x_n} (S''(x))^2 dx \leq \int_{x_1}^{x_n} (u''(x))^2 dx.$$

- (b) Supposons que l'on veuille résoudre numériquement une équation non linéaire. Pour chacun des critères suivants, discuter brièvement le choix d'une ou de plusieurs méthodes numériques :
- on veut une méthode qui converge à coup sûr,
  - on dispose d'une approximation de la racine et on veut converger rapidement,
  - on ne dispose pas de la forme analytique de la fonction.
- (c) Lequel de ces codes matlab donnera, à la fin de l'exécution du programme, une valeur de  $i$  la plus élevée ?

<code>e=1 ;</code>	<code>e=2 ;</code>
<code>i=0 ;</code>	<code>i=0 ;</code>
<code>while (e&gt;0)</code>	<code>while ((1+e)&gt;1)</code>
<code>e=e/2 ;</code>	<code>e=e/2 ;</code>
<code>i=i+1 ;</code>	<code>i=i+1 ;</code>
<code>end ;</code>	<code>end ;</code>

2. Soit le système  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $a$  de façon à ce que la convergence de la méthode de Gauss-Seidel puisse être assurée.

3. Soit une méthode numérique itérative telle que les itérés  $x_n$  convergent vers  $\bar{x} = 1$ . Quatre itérés de la méthode sont listés dans la table ci-dessous :

$n$	$x_n$	$e_n :=  x_n - 1 $
9	0.5034	0.4966
10	1.3679	0.3679
11	0.7981	0.2019
12	1.1003	0.1003

Trouver une approximation de l'ordre de convergence de la méthode.

*Remarque* : il est autorisé d'arrondir légèrement les valeurs obtenues en cours de calcul afin de ne pas rendre celui-ci trop fastidieux.

4. On dispose des valeurs d'une fonction  $f$  aux points  $x-h, x, x+2h$ . Etablir une formule évaluant la dérivée seconde de  $f$  en  $x$  et utilisant les trois points cités plus haut. Déterminer l'ordre de convergence de cette formule.
5. Soit le système d'équations différentielles résolu pour  $t$  croissant

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2xy \\ y'(t) &= y^2 + t.\end{aligned}$$

Déterminer, en fonction de  $x, y, t$  la région de stabilité de ce système.

6. Déterminer numériquement un point du cercle unité (centré à l'origine et de rayon 1) tel que son ordonnée vale le cube de son abscisse. On demande une précision de quatre chiffres significatifs.

## Formulaire

### Taylor

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

**Erreur absolue**  $\tilde{a} - a$

**Erreur relative**  $\frac{\tilde{a}-a}{a}$

**Calcul en virgule flottante**  $fl(x \text{ op } y) = (x \text{ op } y)(1 + \delta)$ ,  $|\delta| \leq \epsilon_M$ , où  $op$  est n'importe quelle opération du type  $+, -, *, /$ ,  $\sqrt{\quad}$ .

### Lagrange

$$\begin{aligned}P(t) &= \sum_{i=1}^n u(x_i) l_i(t) \\ l_i(t) &= \frac{\prod_{j \neq i} (t - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}\end{aligned}$$

## Newton

$$P(t) = \sum_{i=1}^n u[x_1, \dots, x_i](t - x_1) \cdots (t - x_{i-1})$$
$$u[x_i] = u(x_i)$$
$$u[x_i, \dots, x_j] = \frac{u[x_{i+1}, \dots, x_j] - u[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

## Erreur d'interpolation

$$e(x) = \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

## Chebyshev

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$
$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

## Régression (non)-linéaire $\phi(x) = \sum_{j=1}^k a_j \phi_j(x)$

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_0, \phi_k \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_k, \phi_0 \rangle & \langle \phi_k, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_k, \phi_k \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, \phi_0 \rangle \\ \langle u, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, \phi_k \rangle \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)$$

## Sécante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

## Newton-Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

## Newton-Raphson pour un système

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \left( \frac{\partial F(\underline{x}_k)}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} F(\underline{x}_k),$$

## Normes matricielles

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = (\text{valeur propre maximum de } A^T A)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Nombre de conditionnement  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ .

## Méthodes itératives

$$x^{(k)} = Q^{-1}[(Q - A)x^{(k-1)} + b].$$

## Différences centrées

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

## Différences centrées pour les dérivées secondes

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

## Extrapolation de Richardson

$$G_{i,j} = \frac{G_{i,j-1} - q^j G_{i-1,j-1}}{1 - q^j}$$

avec les pas  $h, hq, hq^2, hq^3, \dots$

## Formules de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)) \quad (\text{Trapèze})$$

$$\approx \frac{b-a}{2} \left( \frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b) \right) \quad (\text{Simpson})$$

$$\approx \frac{(b-a)}{2} \left( \frac{1}{4} f(a) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{3}{4} f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \frac{1}{4} f(b) \right) \quad (\text{Simpson } 3/8)$$

$$\approx \frac{(b-a)}{2} \left( \frac{7}{45} f(a) + \frac{32}{45} f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{12}{45} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{32}{45} f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{7}{45} f(b) \right) (\text{Boole})$$

### Méthodes d'Euler explicite (et erreur) et implicite

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i)$$

$$EG_i = (1 + hJ_i)EG_{i-1} + EL_i, \quad EL_i = -\frac{h^2}{2}x''(\xi_i)$$

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + hf(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1})$$

### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}f(\bar{x}_i, t_i) + \frac{h}{2}f(\bar{x}_i + hf(\bar{x}_i, t_i), t_{i+1})$$

### Adams-Bashforth et Adams-Moulton d'ordre 2

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(-f(\bar{x}_{i-1}, t_{i-1}) + 3f(\bar{x}_i, t_i))$$

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \frac{h}{2}(f(\bar{x}_i, t_i) + f(\bar{x}_{i+1}, t_{i+1}))$$