Introduction à l'Analyse Numérique

Examen Final

28 Janvier 2011

Consignes

- Vous disposez de 3 heures 30.
- La Question 1 doit être remise après 1 heure.
- La théorie (c'est-à-dire la question 1) compte pour 25% des points.
  Les exercices (questions 2, 3, 4, 5) comptent pour 75 % des points.
- Veillez à soigneusement justifier vos réponses.
- Vous pouvez uniquement disposer de papier et de matériel pour écrire.
- **Les calculatrices ne sont autorisées qu'une fois la Question 1 reprise**.
- Les téléphones portables doivent rester éteints et hors de portée.
- Le résultat final, même juste, mais sans explication ne vaut pas de point.
- L'explication correcte d'une démarche, même sans calcul, peut valoir des points dans certains cas.

Bon travail !

1. (a) On souhaite intégrer numériquement une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. D'une part, on procède à l'extrapolation de Richardson à partir d'une méthode composite des trapèzes avec pas de h et $2h$ respectivement. D'autre part, on calcule l'intégrale avec la méthode de Simpson avec pas de h. Montrer que ces deux façons de faire donnent le même résultat.

   (b) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ régulière et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le nombre d'opérations nécessaires afin d'obtenir un système triangulaire après élimination de Gauss sur $Ax = b$ est de $\frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$.

2. Soit le polyèdre P défini par le système d'inégalités linéaires

$$\begin{aligned} x_1 - \ x_2 &\geq -1 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 7 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Ecrire la forme standard du système

   (b) Ecrire une solution de base dans laquelle x_1 et x_2 sont tous deux dans la base. La solution de base est-elle réalisable ?

   (c) On souhaite minimiser $-x_1 - x_2$ sur le polyèdre P. Déterminer si votre solution de base est optimale. Si non, appliquer l'algorithme du simplexe afin de déterminer la solution optimale du problème.

3. Lors d'un match de tennis, un spectateur prend des prises de vue en rafale d'un coup droit. Son appareil photo est réglé sur une prise de vue tous les 2 dixièmes de seconde. Après analyse des photos, il peut renseigner la position de la balle dans le sens de la longueur du terrain (où l'origine est située à hauteur du filet) :

Temps (s)	0	0.2	0.4	0.6
Position (m)	-10	-4	1	5

   (a) Sachant que la joueuse a frappé son coup droit 0.1 seconde avant la première photo, évaluer la vitesse de la balle au moment de la frappe.

   (b) Expliquer sans faire les calculs comment évaluer la vitesse de la balle au passage du filet (position = 0).

4. On mesure la consommation de gaz nécessaire pour chauffer pendant une journée un bâtiment en fonction de la température extérieure journalière moyenne. Les données pour quatre températures différentes sont renseignées dans la table ci-dessous :

Température (T)	14	10	5	0
15-T	1	5	10	15
Consommation (m^3 de gaz)	0.5	3.5	8	13

Déterminer le degré de dépendance de la consommation par rapport à $(15 - T)$, c'est-à-dire déterminer α dans la relation

$$\text{consommation} = k\ (15 - T)^\alpha.$$

5. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer numériquement un vecteur propre de la valeur propre de plus grand module de A en partant du vecteur de départ $v = (0\ 0\ 1)^T$.

(b) Que se passe-t-il si on part du vecteur $v = (1\ 0\ 0)^T$ et pourquoi ?

Formulaire

Taylor $f(x+h) = \sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$
Lagrange $P(t) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) l_i(t)$ et $l_i(t) = \frac{\prod_{j\neq i}(t-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$
Erreur d'interpolation $e(x) = \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.
Régression (non)-linéaire $\phi(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \phi_j(x)$

$$\begin{pmatrix} \langle\phi_0,\phi_0\rangle & \langle\phi_0,\phi_1\rangle & \cdots & \langle\phi_0,\phi_k\rangle \\ \langle\phi_1,\phi_0\rangle & \langle\phi_1,\phi_1\rangle & \cdots & \langle\phi_1,\phi_k\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle\phi_k,\phi_0\rangle & \langle\phi_k,\phi_1\rangle & \cdots & \langle\phi_k,\phi_k\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u,\phi_0\rangle \\ \langle u,\phi_1\rangle \\ \vdots \\ \langle u,\phi_k\rangle \end{pmatrix}$$

et $\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)$
Variances $\sigma_k^2 = \frac{1}{n}(\langle u,u\rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle u,p_i\rangle^2}{\langle p_i,p_i\rangle})$.
Différences centrées

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \quad \frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h}$$

Différences centrées pour les dérivées secondes

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

Extrapolation de Richardson

$$G_{i,j} = \frac{G_{i,j-1} - q^j G_{i-1,j-1}}{1-q^j}$$

avec les pas $h, hq, hq^2, hq^3, \ldots$
Formules de Newton-Cotes

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) && \text{(Trapèze)} \\ &\approx \frac{b-a}{2}(\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{3}f(b)) && \text{(Simpson)} \\ &\approx \frac{(b-a)}{2}(\frac{1}{4}f(a) + \frac{3}{4}f(\frac{2a+b}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{a+2b}{3}) + \frac{1}{4}f(b)) && \text{(Simpson 3/8)} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{(b-a)}{2}(\frac{7}{45}f(a) + \frac{32}{45}f(\frac{3a+b}{4}) + \frac{12}{45}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{32}{45}f(\frac{a+3b}{4}) + \frac{7}{45}f(b)) \text{(Boole)}$$

Erreur d'intégration $\quad I - T_h = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$

Normes matricielles

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_2 = (\text{valeur propre maximum de } A^T A)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Nombre de conditionnement $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.
Méthodes itératives $\quad x^{(k)} = Q^{-1}[(Q-A)x^{(k-1)} + b]$
Coût réduit $\bar{c}_j := c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j$
Simplexe : Variable qui sort de la base : $\quad \arg\ \min_{i\in B|\bar{a}_{ij}>0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$.

Newton-Raphson pour un système

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \left(\frac{\partial F(\underline{x}_k)}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} F(\underline{x}_k),$$

Quasi-Newton : mise à jour de la matrice

$$A_k = A_{k-1} + \frac{(\underline{y}_{k-1} - A_{k-1}\underline{d}_{k-1})\underline{d}_{k-1}^T}{\underline{d}_{k-1}^T \underline{d}_{k-1}}.$$