

INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE

EXAMEN FINAL

29 Août 2011

Consignes

- Vous disposez de 3 heures.
- La Question 1 doit être remise après 1 heure.
- La théorie (c'est-à-dire la question 1) compte pour 25% des points.
Les exercices (questions 2, 3, 4) comptent pour 75 % des points.
- Veillez à soigneusement justifier vos réponses.
- Vous pouvez uniquement disposer de papier et de matériel pour écrire.
- **Les calculatrices ne sont autorisées qu'une fois la Question 1 reprise.**
- Les téléphones portables doivent rester éteints et hors de portée.
- Le résultat final, même juste, mais sans explication ne vaut pas de point.
- L'explication correcte d'une démarche, même sans calcul, peut valoir des points dans certains cas.

Bon travail!

1. (a) Soit f deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $I := \int_a^b f(x)dx$ et soit T_h l'approximation obtenue par la méthode composite des trapèzes avec un pas h . Montrer que l'on a

$$I - T_h = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$$

pour un certain $\xi \in [a, b]$.

- (b) Expliquer dans quel cas un petit résidu $|Ax-b|$ n'implique pas forcément d'obtenir une bonne approximation de la solution du système linéaire $Ax = b$.
2. L'ordinateur de bord d'une voiture renseigne la consommation du trajet. On relève la valeur renseignée à cinq moments. Ces valeurs sont renseignées dans le tableau ci-dessous.

Temps (min)	1	2	3'15''	4'	4'45''
Kms parcourus	1	2	3	4	5
Conso trajet (l/100 km)	6	6	7	6.5	6
litres consommés	0.06	0.12	0.21	0.26	0.3

Le milieu du trajet comporte une côte (au km 3). Utiliser une formule centrée et l'extrapolation de Richardson pour évaluer la consommation instantanée dans la côte (au km 3).

3. On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Déterminer une solution de base réalisable du polyèdre des solutions réalisables.
- (b) Déterminer les coûts réduits correspondants à la solution de base trouvée.
- (c) Prouver que le problème n'a pas de solution optimale finie.

4. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Pour quelles valeurs de a , un système $Ax = b$ peut-il être résolu en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel ?
- (b) Résoudre le système $Ax = b$ pour $a = 2$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ en appliquant trois itérations de la méthode de Gauss-Seidel et en partant du vecteur initial $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Formulaire

Taylor $f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$

Lagrange $P(t) = \sum_{i=1}^n u(x_i) l_i(t)$ et $l_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t-x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i-x_j)}$

Erreur d'interpolation $e(x) = \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_1) \cdots (x-x_n)$.

Régression (non)-linéaire $\phi(x) = \sum_{j=1}^k a_j \phi_j(x)$

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_0, \phi_k \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_k, \phi_0 \rangle & \langle \phi_k, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_k, \phi_k \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, \phi_0 \rangle \\ \langle u, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, \phi_k \rangle \end{pmatrix}$$

et $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)$

Variances $\sigma_k^2 = \frac{1}{n} (\langle u, u \rangle - \sum_{i=0}^k \frac{\langle u, p_i \rangle^2}{\langle p_i, p_i \rangle})$.

Différences centrées

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

Différences centrées pour les dérivées secondes

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Extrapolation de Richardson

$$G_{i,j} = \frac{G_{i,j-1} - q^j G_{i-1,j-1}}{1 - q^j}$$

avec les pas h, hq, hq^2, hq^3, \dots

Formules de Newton-Cotes

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)) && \text{(Trapèze)} \\ &\approx \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b) \right) && \text{(Simpson)} \\ &\approx \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{1}{4} f(a) + \frac{3}{4} f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \frac{3}{4} f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \frac{1}{4} f(b) \right) && \text{(Simpson 3/8)} \\ &\approx \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{7}{45} f(a) + \frac{32}{45} f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{12}{45} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{32}{45} f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{7}{45} f(b) \right) && \text{(Boole)} \end{aligned}$$

Erreur d'intégration $I - T_h = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$

Normes matricielles

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_2 = (\text{valeur propre maximum de } A^T A)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Nombre de conditionnement $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Méthodes itératives $x^{(k)} = Q^{-1}[(Q - A)x^{(k-1)} + b]$

Coût réduit $\bar{c}_j := c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j$

Simplexe : Variable qui sort de la base : $\arg \min_{i \in B | \bar{a}_{ij} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$.

Newton-Raphson pour un système

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \left(\frac{\partial F(\underline{x}_k)}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} F(\underline{x}_k),$$

Quasi-Newton : mise à jour de la matrice

$$A_k = A_{k-1} + \frac{(y_{k-1} - A_{k-1} d_{k-1}) d_{k-1}^T}{d_{k-1}^T d_{k-1}}.$$