

Eléments de processus stochastiques

Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov - application à l'optimisation combinatoire

Pierre Geurts, Laurine Duchesne, Vân Anh Huynh-Thu

{p.geurts,l.duchesne,vahuynh}@uliege.be



18/02/2020

Méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC)

Principe :

On veut échantillonner selon une distribution π .

Problème :

Il n'est pas toujours possible d'échantillonner selon la distribution π , notamment lorsque celle-ci est connue à un facteur de normalisation près (ex : inférence bayésienne).

Solution :

Les méthodes MCMC permettent de simuler une chaîne de Markov dont la *distribution stationnaire* est π .

Algorithme de Metropolis-Hastings (MH)

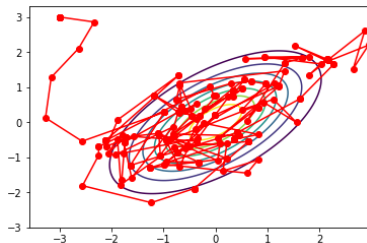
Given $X^{(t)}$,

1. Generate $Y^{(t+1)} \sim q(Y|X^{(t)})$
2. Compute $\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi(Y^{(t+1)})}{\pi(X^{(t)})} \frac{q(X^{(t)}|Y^{(t+1)})}{q(Y^{(t+1)}|X^{(t)})} \right\}$
3. Set

$$X^{(t+1)} = \begin{cases} Y^{(t+1)} & \text{with probability } \alpha \\ X^{(t)} & \text{with probability } 1 - \alpha \end{cases}$$

où $q(\cdot|X)$ est la distribution conditionnelle proposée et $\pi(X)$ la distribution selon laquelle on veut échantillonner.

Fait partie du top 10 des “algorithmes ayant eu la plus grande influence sur le développement et la pratique de la science et de l’ingénierie au 20ème siècle.” (Computing in Science & Engineering journal, 2000).



Le projet

Partie 1 : Étude “théorique” de l’algorithme MH

Vous faire comprendre les propriétés de l’algorithme mathématiquement et sur base d’expériences numériques simples, en se raccrochant aux notions vues au cours théorique.

Partie 2 : Application à un problème d’optimisation

Implémenter et exploiter l’algorithme pour résoudre un problème d’optimisation combinatoire, *suggéré ou de votre choix*.

Application à un problème d'optimisation combinatoire

Objectif : on veut trouver $x \in S$ qui minimise une fonction $f(x)$. S a une taille finie mais est trop grand pour réaliser une recherche exhaustive.

Idée générale : On définit une distribution de probabilité

$$\pi(x) \propto \exp(-\beta f(x))$$

et on utilise MH pour échantillonner dans cette distribution.

Exemples de problèmes : générer des grilles de mots croisés, voyageur de commerce, trouver des solutions au sudoku, débruitage d'images, cryptographie...

1	A	2	M	3	I	4	D
5	N	O	S	E			
6	T	A	L	E			
7	S	T	E	P			



			6	7			
	7		9	4	3		
4							1
3	6						
	2	8	1	9			
				1	5		
1							7
	3		5	8	9		
	5		4				