Eléments du calcul des probabilités

Répétition 4

18 avril 2018

Exercice sur deux variables aléatoires discrètes

4.1. EXAMENS JUIN 2012 & SEPTEMBRE 2012

Une dame fait du shopping et décide dans un premier temps de rentrer dans un magasin de chaussures. La probabilité qu'elle n'achète rien est de 30%, celle qu'elle achète exactement une paire de chaussures est de 40%, celle qu'elle en achète deux est de 20% et celle qu'elle en achète trois est de 10%. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de paires de chaussures achetées par la dame.

Dans un second temps, la dame rentre dans un magasin de vêtements. Si elle n'avait pas acheté de chaussures, la probabilité qu'elle n'achète pas non plus de vêtements est nulle, la probabilité qu'elle achète exactement un vêtement est de 30%, celle qu'elle en achète deux est de 50% et celle qu'elle en achète trois est de 20%.

Si elle avait au contraire acheté exactement une paire de chaussures, la probabilité qu'elle n'achète pas de vêtements est de 10%, celle qu'elle achète un vêtement est de 50%, celle qu'elle en achète deux est de 25% et celle qu'elle en achète trois est de 15%.

Finalement, si elle avait acheté plus d'une paire de chaussures, la probabilité qu'elle n'achète aucun vêtement est de 50%, la probabilité qu'elle achète un vêtement est de 30%, celle d'en acheter deux est de 20% et il n'y a aucune chance qu'elle en achète trois. Soit $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de vêtements achetés par la dame.

a) Déterminez la table de contingences du couple de v.a. discrètes $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

b) Déterminez la densité marginale de $\mathcal{X}$ pour tout $x \in \Omega_{\mathcal{X}}$.

c) Déterminez la densité marginale de $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$

d) Vérifiez si $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = P_{\mathcal{X}}(x)P_{\mathcal{Y}}(y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega_{\mathcal{X}} \times \Omega_{\mathcal{Y}}$.
Sinon, pourquoi l'égalité n'est-elle pas toujours vérifiée ?

e) Déterminez la table de contingences pour $P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$

f) Calculez l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

g) Vérifiez le théorème de l'espérance totale pour $\mathcal{X}$.

h) Calculez la variance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

i) Vérifiez le théorème de la variance totale pour $\mathcal{X}$.

j) $\mathcal{Y}$ est-elle une bonne variable explicative de $\mathcal{X}$?

Exercices sur deux variables aléatoires conjointement continues

4.2. La densité conjointe de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est donnée par :

$$f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = \begin{cases} c\ e^{-x}e^{-2y} & \text{si} \quad 0 \leq x < +\infty,\ y \geq 0,\ c \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ définit bien une densité de probabilité (préciser la valeur de c)

b) Calculer $P(\mathcal{X} \geq 1, \mathcal{Y} \leq 1)$

c) Calculer $P(\mathcal{X} \leq \mathcal{Y})$

d) Calculer $P(\mathcal{X} \leq a)$ si a $\in \mathbb{R}^+$

4.3. Deux variables aléatoires rélles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ conjointement continues sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ et sont telles que leur densité conjointe $f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y)$ est uniforme sur l'ensemble $U = \{(x,y) \in [0,2] \times [0,2] : y \leq x\}$ et nulle ailleurs sur $\mathbb{R}^2$. On demande :

a) la densité de probabilité marginale de $\mathcal{X}$

b) la densité de probabilité marginale de $\mathcal{Y}$

c) les variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.

d) le coefficient de corrélation linéaire de ces deux variables aléatoires.

Exercice sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev

4.4. Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Il pèse 120T avec l'équipage et le plein de carburant. Il est interdit de décollage si son poids dépasse 129,42T. Les 100 places ont été réservées. Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance mathématique de 70 kg et d'écart-type de 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance mathématique de 20 kg et d'écart-type de 10kg. Toutes ces variables aléatoires sont indépendantes.

a) Calculer l'espérance mathématique et l'écart type du poids final de l'appareil avant le décollage.

b) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff pour calculer la probabilité maximale que l'avion ne puisse pas décoller.

c) Si les poids des passagers et des bagages suivent une loi normale, respectivement $N(\mu = 70; \sigma^2 = 100)$ et $N(\mu = 20; \sigma^2 = 100)$, quelle est la probabilité que l'avion ne puisse pas décoller ? Pourquoi y-a-t-il une grande différence par rapport à la valeur calculée au point b) ?

Exercices suggérés

4.5. EXAMEN JUIN 2014

Lors des matchs du premier tour de la coupe du monde 2014 au Brésil, les équipes reçoivent 3 points en cas de victoire, 1 point en cas d'égalité et 0 point en cas de défaite. La Belgique jouera son premier match contre l'Algérie. La probabilité que la Belgique perde ce match est de 15%, celle qu'elle fasse égalité de 25% et celle qu'elle gagne de 60%. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de points obtenus par la Belgique contre l'Algérie.

Le résultat du match contre l'Algérie aura une influence sur le moral des joueurs, qui seront d'autant plus motivés lors du deuxième match contre la Russie qu'ils ont réussi à marquer des points face à l'Algérie. Ainsi, si la Belgique perd contre l'Algérie, la probabilité qu'elle perde contre la Russie est de 30%, celle qu'elle fasse égalité est de 40% et celle qu'elle gagne de 30%. Si la Belgique fait égalité contre l'Algérie, la probabilité qu'elle perde contre la Russie est de 25%, celle qu'elle fasse égalité est de 40% et celle qu'elle gagne de 35%. Finalement, si la Belgique gagne contre l'Algérie, la probabilité qu'elle perde contre la Russie est de 20%, celle qu'elle fasse égalité est de 30% et celle qu'elle gagne de 50%. Soit $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de points obtenus par la Belgique contre la Russie.

Les sous-questions suivantes valent 2 points chacunes :

a) Déterminez la table de contingences du couple de v.a. discrètes $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

b) Déterminez la densité marginale de $\mathcal{X}$ pour tout $x \in \Omega_{\mathcal{X}}$.

c) Déterminez la densité marginale de $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$

d) Vérifiez si $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = P_{\mathcal{X}}(x)P_{\mathcal{Y}}(y)$ pour tout $(x,y) \in \Omega_{\mathcal{X}} \times \Omega_{\mathcal{Y}}$.
Sinon, pourquoi l'égalité n'est-elle pas toujours vérifiée ?

e) Déterminez la table de contingences pour $P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$

f) Calculez l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

g) Vérifiez le théorème de l'espérance totale.

h) Calculez la variance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

i) Vérifiez le théorème de la variance totale.

j) $\mathcal{Y}$ est-elle une bonne variable explicative de $\mathcal{X}$?

4.6. EXAMEN AOUT 2015

Les variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont distribuées uniformément dans le triangle OAB, où $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$. Nous désignons par P le point de coordonnées $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ et M le point d'intersection des droites OP et AB.

a) Déterminer les densités de probabilité marginales des variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

b) Calculer $cov(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Les variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont-elles indépendantes ?

c) Si $\mathcal{U}$ rend la longueur du segment $|AM|$, monter que $\mathcal{U}$ est distribué uniformément dans $[0, \sqrt{2}]$

4.7. EXAMEN JUIN 2015 (similaire à JUIN 2013 & AOUT 2013 & AOUT 2014)
Christophe se rend dans un bar avec son ami François pour déguster des bières spéciales. La probabilité que Christophe n'en consomme que deux est de 20%, celle qu'il en boive trois est de 30% et celle qu'il en déguste quatre est de 50%. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de bières consommées par Christophe.

François a comme réputation de ne pas boire beaucoup d'alcool, mais a tout de même tendance à se laisser influencer par son ami Christophe et à consommer plus lorsque ce dernier consomme plus. Ainsi, lorsque Christophe déguste un total de deux bières, la probabilité que François n'en boive qu'une est de 60% et celle qu'il en consomme deux est de 40%. Lorsque Christophe déguste trois bières au total, la probabilité que François n'en boive qu'une est de 20%, celle qu'il en consomme deux est de 60% et celle qu'il en déguste trois de 20%. Lorsque Christophe boit quatre bières, la probabilité que François en consomme deux est de 30% et celle qu'il en consomme trois est de 70%. Soit $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de bières consommées par François.

Les sous-questions suivantes valent 2 points chacune :

a) Déterminez la table de contingences du couple de v.a. discrètes $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

b) Vérifiez si $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = P_{\mathcal{X}}(x)P_{\mathcal{Y}}(y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega_{\mathcal{X}} \times \Omega_{\mathcal{Y}}$.
Sinon, pourquoi l'égalité n'est-elle pas toujours vérifiée ?

c) Calculez l'espérance et la variance du nombre de bières dégustées par François.

d) Déterminez la table de contingences pour $P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$.

e) Calculez l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

f) Vérifiez le théorème de l'espérance totale.

g) Calculez la variance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

h) Vérifiez le théorème de la variance totale.

i) $\mathcal{Y}$ est-elle une bonne variable explicative de $\mathcal{X}$?

j) Calculez $cov\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$. Interprétez la corrélation entre ces variables.

4.8. EXAMEN AOUT 2013
Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ est disribuée sur $[1, 3]$ avec une densité

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^2} & \text{si} \quad x \in [1, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ est distribuée indépendamment de $\mathcal{X}$ sur $[0, +\infty]$ avec une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{2}$. Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ rendent les dimensions d'un rectangle, calculer la probabilité que l'aire de ce rectangle soit inférieure à 1.

4.9. Sur un segment $[OC]$ de longeur L, on positionne au hasard et indépendamment l'un de l'autre, deux points A et B. Soit la variable aléatoire $\mathcal{D}$ rendant la distance entre ces points. On demande

a) la fonction de répartition de $\mathcal{D}$.

b) la densité de probabilité de $\mathcal{D}$.

c) l'espérance mathématique de $\mathcal{D}$.

4.10. EXAMEN JUIN 2012
Soit un segment de droite $[AB]$ de longueur 2 et M le milieu de ce segment. On choisit au hasard un point P sur $[AM]$ et un point Q sur $[MB]$, ces choix étant indépendants. Soit la variable aléatoire $\mathcal{D}$ rendant la distance de P à Q.

a) Déterminer la fonction de répartition de $\mathcal{D}$, sa densité de probabilité, son espérance mathématique et sa variance.

b) Si AP et AQ sont les dimensions d'un rectangle, calculer la probabilité que l'aire de ce rectange soit supérieure à $\frac{1}{2}$ et inférieure à $\frac{3}{2}$.

On choisira comme variables aléatoires uniformes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, respectivement la distance de A à Q et la distance de A à P.

4.11. Une variable aléatoire $\mathcal{X}$ est uniforme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ est exponentielle de moyenne $\frac{1}{a}$ *sur* $[0, \infty[$ $(a > \frac{1}{2})$. Ces deux variables étant indépendantes, quelle est la probabilité pour que $\mathcal{X} + \mathcal{Y} < a$?

4.12. On considère un cercle de rayon R dont le centre est à l'origine des axes de coordonnées. On choisit un point au hasard de manière à ce que toutes les régions de taille donnée incluses dans le cercle aient la même probabilité de contenir ce point. En d'autres termes, la distribution des points dans le cercle est uniforme. Les variables aléatoires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ représentent les coordonnées du point choisi. Ainsi, il existe une densité de probabilité :

$$f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = \begin{cases} c & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer

a) c

b) $f_{\mathcal{X}}(x)$ et $f_{\mathcal{Y}}(y)$

c) la probabilité que le distance du point choisi au centre soit $\leq a(a \in \mathbb{R})$

4.13. EXAMEN AOUT 2014
Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de même paramètre $\lambda > 0$ et soit $\mathcal{Z} = \max(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

a) Déterminer la densité de probabilité de $\mathcal{Z}$ (6 points).

b) Calculer la valeur moyenne de $\mathcal{Z}$ (6 points).

En aviation, le temps de nécessaire à la vérification du bon fonctionnement d'un moteur est une variable exponentielle dont la valeur moyenne est de 4 heures. Dans le cas d'un bimoteur, on suppose que les vérifications du bon fonctionnement des deux moteurs s'effectuent simultanément et de manière indépendante.

c) Calculer le temps moyen de vérification du bon fonctionnement d'un bimoteur. (2 points)

d) Quel laps de temps faut-il prévoir pour assurer à 95% que la vérification du bon fonctionnement du bimoteur puisse s'effectuer endéans cette période ? (6 points)

4.14. EXAMEN SEPTEMBRE 2012

Soit la fonction

$$f_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad |x| \leq k, k > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminez k pour que $f_{\mathcal{X}}(x)$ soit la d.d.p. d'une variable aléatoire continue $\mathcal{X}$.

b) Utilisez le graphique de $f_{\mathcal{X}}(x)$ pour estimer $P(-\frac{1}{4} \leq \mathcal{X} \leq \frac{1}{4})$

c) Déterminez la fonction de répartition de $\mathcal{X}$ et en déduire $P(0 \leq \mathcal{X} \leq a), 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$

d) Déterminez l'espérance mathématique de $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^2$.

4.15. EXAMEN MAI 2016

Lors des matchs du premier tour du championnat d'Europe de football 2016 en France, les équipes reçoivent 3 points en cas de victoire, 1 point en cas d'égalité et 0 point en cas de défaite. La Belgique jouera son premier match contre l'Italie. La probabilité que la Belgique perde ce match est de 35%, celle qu'elle fasse égalité de 25% et celle qu'elle gagne de 40%. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de points obtenus par la Belgique contre l'Italie.

Le résultat du match contre l'Italie aura une influence sur le moral des joueurs, qui seront d'autant plus motivés lors du deuxième match contre l'Irlande qu'ils ont réussi à marquer des points face à l'Italie. Ainsi, si la Belgique perd contre l'Italie, la probabilité qu'elle perde contre l'Irlande est de 25%, celle qu'elle fasse égalité est de 40% et celle qu'elle gagne de 35%. Si la Belgique fait égalité contre l'Italie, la probabilité qu'elle perde contre l'Irlande est de 20%, celle qu'elle fasse égalité est de 35% et celle qu'elle gagne de 45%. Finalement, si la Belgique gagne contre l'Italie, la probabilité qu'elle perde contre l'Irlande est de 15%, celle qu'elle fasse égalité est de 35% et celle qu'elle gagne de 50%. Soit $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de points obtenus par la Belgique contre l'Irlande.

Les sous-questions suivantes valent 2 points chacune :

a) Déterminez la table de contingences du couple de v.a. discrètes $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

b) Vérifiez si $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x,y) = P_{\mathcal{X}}(x)P_{\mathcal{Y}}(y)$ pour tout $(x,y) \in \Omega_{\mathcal{X}} \times \Omega_{\mathcal{Y}}$.
Sinon, pourquoi l'égalité n'est-elle pas toujours vérifiée ?

c) Calculez l'espérance et la variance du nombre de points remportés par la Belgique face à l'Irlande.

d) Déterminez la table de contingences pour $P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$.

e) Calculez l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

f) Vérifiez le théorème de l'espérance totale.

g) Calculez la variance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

h) Vérifiez le théorème de la variance totale.

i) $\mathcal{Y}$ est-elle une bonne variable explicative de $\mathcal{X}$?

j) Calculez $cov\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}$. Interprétez la corrélation entre ces variables.

4.16. EXAMEN JUIN 2017

Roland Garros est un tournoi de tennis se jouant sur terre battue et faisant partie des 4 tournois du Grand Chelem. Pour remporter un match dans le tournoi homme, un joueur doit gagner 3 sets. Le nombre de sets d'un match à Roland Garros est donc variable et peut être compris entre 3 et 5. Le tournoi 2017 venant juste de se terminer, un journaliste décide d'analyser les performances du joueur Raphaël Nadal. En particulier, il souhaite connaître l'influence du premier set sur le nombre de sets gagnés par Nadal. Les statistiques récoltées par l'ATP ("Association of Tennis Professionals") indiquent que la probabilité que Nadal gagne le premier set est de 0,76 et la probabilité qu'il le perde est de 0,24. Définissons $\mathcal{Y}$, la variable aléatoire discrète rendant le fait que Nadal a gagné ($\mathcal{Y} = 1$) ou perdu ($\mathcal{Y} = 0$) le premier set.

Le journaliste observe que lorsque Nadal a gagné le premier set, la probabilité qu'il ne gagne aucun set est de 0, la probabilité qu'il gagne un set est de 0,02, la probabilité qu'il gagne deux sets est de 0,04 et la probabilité qu'il gagne trois sets est de 0,94. De même, lorsque Nadal perd le premier set, la probabilité qu'il ne gagne aucun set est de 0,20, la probabilité qu'il gagne un set est de 0,20, la probabilité qu'il gagne deux sets est de 0,18 et la probabilité qu'il gagne trois sets est de 0,42. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire discrète rendant le nombre de sets gagnés par Nadal dans un match.

Les sous-questions suivantes valent 2 points chacune :

a) Déterminez la table de contingences du couple de v.a. discrètes $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

b) Vérifiez si $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = P_{\mathcal{X}}(x)P_{\mathcal{Y}}(y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega_{\mathcal{X}} \times \Omega_{\mathcal{Y}}$.
Sinon, pourquoi l'égalité n'est-elle pas toujours vérifiée ?

c) Déterminez la table de contingences pour $P_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$.

d) Calculez l'espérance et la variance du nombre de sets remportés par Nadal en un match.

e) Calculez l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

f) Vérifiez le théorème de l'espérance totale.

g) Calculez la variance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ pour tout $y \in \Omega_{\mathcal{Y}}$.

h) Vérifiez le théorème de la variance totale.

i) $\mathcal{Y}$ est-elle une bonne variable explicative de $\mathcal{X}$?

j) Calculez $cov\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$. Interprétez la corrélation entre ces variables.

Solutions des exercices suggérés

4.5.

a)

	$\mathcal{X}=0$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=3$	$\sum_{\Omega_{\mathcal{X}}}$
$\mathcal{Y}=0$	4,5%	6,25%	12%	22,75%
$\mathcal{Y}=1$	6%	10%	18%	34%
$\mathcal{Y}=3$	4,5%	8,75%	30%	43,25%
$\sum_{\Omega_{\mathcal{Y}}}$	15%	25%	60%	

b) $P_{\mathcal{X}}(0) = 15\%$ $P_{\mathcal{X}}(1)=25\%$ $P_{\mathcal{X}}(3)=60\%$.

c) $P_{\mathcal{Y}}(0) = 22{,}75\%$ $P_{\mathcal{Y}}(1)=34\%$ $P_{\mathcal{Y}}(3)=43{,}25\%$.

d) $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(0,0) = 4,5\% \neq P_{\mathcal{X}}(0)P_{\mathcal{Y}}(0) = 15\% \times 22,75\%$. Il n'y a pas indépendance.

e)

	$\mathcal{X}=0$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=3$	$\sum_{\Omega_{\mathcal{X}}}$
$\mathcal{Y}=0$	19,78%	27,47%	52,75%	1
$\mathcal{Y}=1$	17,65%	29,41%	52,94%	1
$\mathcal{Y}=3$	10,405%	20,23%	69,365%	1

f) $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=0\} = 1,86$ $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 1,88$ $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=3\} = 2,28$

g) $E\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 22,75\% \times 1,86 + 34\% \times 1,88 + 43,25\% \times 2,28 = 2,05$

$E\{\mathcal{X}\} = 25\% + 60\% \times 3 = 2,05$

h) $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=0\} = 1,56$ $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 1,52$ $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=3\} = 1,25$

i) $E\{V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 1,412$ $V\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 0,035$ $V\{\mathcal{X}\} = 1,447 = 1,412 + 0,035$

j) $\mathcal{X}$ n'est pas une bonne variable explicative de $\mathcal{Y}$ (en explique $\pm$ 2,4%).

4.6. a)

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{si} \quad y \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $-\frac{1}{36}$ les variables ne sont pas indépendantes

c)

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \leq 0 \\ \frac{u}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad 0 \leq u \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{si} \quad u \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f_u(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad u \in [0, \sqrt{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.7.

	$\mathcal{X}=2$	$\mathcal{X}=3$	$\mathcal{X}=4$	$\sum_{\Omega_{\mathcal{X}}}$
$\mathcal{Y}=1$	12%	6%	0%	18%
$\mathcal{Y}=2$	8%	18%	15%	41%
$\mathcal{Y}=3$	0%	6%	35%	41%
$\sum_{\Omega_{\mathcal{Y}}}$	20%	30%	50%	

a) $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(2,1) = 12\% \neq P_{\mathcal{X}}(2)P_{\mathcal{Y}}(1) = 20\% \times 18\%$. Il n'y a pas indépendance.

b) $E\{\mathcal{Y}\} = 2,23$. $V\{\mathcal{Y}\} = 0,5371$.

	$\mathcal{X}=2$	$\mathcal{X}=3$	$\mathcal{X}=4$	$\sum_{\Omega_{\mathcal{X}}}$
$\mathcal{Y}=1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
$\mathcal{Y}=2$	$\frac{8}{41}$	$\frac{18}{41}$	$\frac{15}{41}$	1
$\mathcal{Y}=3$	0	$\frac{6}{41}$	$\frac{35}{41}$	1

c)

d) $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 2,3333$ $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=2\} = 3,1707$ $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=3\} = 3,8537$

e) $E\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 18\% \times \frac{7}{3} + 41\% \times \frac{130}{41} + 41\% \times \frac{158}{41} = 3,3$

$E\{\mathcal{X}\} = 20\% \times 2 + 30\% \times 3 + 50\% \times 4 = 3,3$

f) $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\}=0,2222 \quad V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=2\}=0,5318 \quad V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=3\}=0,1249$

g) $E\{V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\}=18\% \times \frac{2}{9}+41\% \times \frac{894}{1681}+41\% \times \frac{210}{1681}=0,3093$

$V\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\}=0,3007 \quad V\{\mathcal{X}\}=0,61 \quad$ 0,3093 + 0,3007 = 0,61

h) $\mathcal{X}$ explique plus ou moins 49,3% de $\mathcal{Y}$.

i) $cov\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\}=0,401$. Les deux variables sont sans surprise corrélées positivement. Plus l'un des deux consomme de bière, plus l'autre boit !

4.8. 71,6%

4.9. a)

$$F_D(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \frac{2Lt-t^2}{L^2} & \text{si} \quad 0\leq t\leq L \\ 1 & \text{si} \quad t>L \end{cases}$$

b)

$$f_D(t)=\begin{cases} \frac{2(L-t)}{L^2} & \text{si} \quad 0\leq t\leq L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.10. a)

$$F_{\mathcal{D}}(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \frac{t^2}{2} & \text{si} \quad 0\leq t\leq 1 \\ 1-\frac{(2-t)^2}{2} & \text{si} \quad 1\leq t\leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad t>2 \end{cases}$$

$$f_{\mathcal{D}}(t)=\begin{cases} t & \text{si} \quad 0\leq t\leq 1 \\ 2-t & \text{si} \quad 1\leq t\leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

E$\{\mathcal{D}\}$ = 1 et V$\{\mathcal{D}\}$ = $\frac{1}{6}$

b) 0,58 c) $\frac{L}{3}$

4.11. Sera résolu lors de la répétition 5.

4.12. a) $c=\frac{1}{\pi R^2}$

b)

$$f_{\mathcal{X}}(x)=\begin{cases} 2\sqrt{R^2-x^2}\frac{1}{\pi R^2} & \text{si} \quad x\in[-R,R] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{\mathcal{Y}}(y)=\begin{cases} 2\sqrt{R^2-y^2}\frac{1}{\pi R^2} & \text{si} \quad y\in[-R,R] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) 0 si $a<0$, $\frac{a^2}{R^2}$ si $0\leq a\leq R$, 1 si $a>R$

4.13. a)

$$f_Z(t)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad t\leq 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t}) & \text{si} \quad t>0 \end{cases}$$

b) $\frac{3}{2\lambda}$ c) 6 heures d) 14 heures 46 minutes

4.14. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{a^2}{2}+a$ d) $\frac{1}{12}$

4.15

Table 1 – Table de contingence pour $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$

	$\mathcal{X}=0$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=3$	$\sum_{\Omega_{\mathcal{X}}}$
$\mathcal{Y}=0$	8,75%	5%	6%	19,75%
$\mathcal{Y}=1$	14%	8,75%	14%	36,75%
$\mathcal{Y}=3$	12,25%	11,25%	20%	43,5%
$\sum_{\Omega_{\mathcal{Y}}}$	35%	25%	40%	

a) $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(0,0)=8,75\% \neq P_{\mathcal{X}}(0)P_{\mathcal{Y}}(0)=35\% \times 19,75\%$. Il n'y a pas indépendance.

b) $E\{\mathcal{Y}\}=1,6725$ et $V\{\mathcal{Y}\}=1,485$

Table 2 – Table de contingence pour $P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$

	$\mathcal{X}=0$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=3$	$\sum_{\Omega_\mathcal{X}}$
$\mathcal{Y}=0$	44,30%	25,32%	30,38%	1
$\mathcal{Y}=1$	38,095%	23,81%	38,095%	1
$\mathcal{Y}=3$	28,16%	25,86%	45,98%	1

c) Les valeurs de la table se calculent à partir de la formule $P_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}} = \frac{P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}}{P_\mathcal{Y}}$

d) $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=0\} = 1,165$, $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 1,38$, $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=3\} = 1,64$

e) $E\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 1,45$, $E\{\mathcal{X}\} = 1,45$

f) $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=0\} = 1,63$, $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 1,76$, $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=3\} = 1,71$

g) $E\{V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 1,71$, $V\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 0,035$, $V\{\mathcal{X}\} = E\{\mathcal{X}^2\} - E\{\mathcal{X}\}^2 = 1,75$

1,71 + 0,035 $\approx$ 1,75

h) $\mathcal{X}$ n'est pas du tout une bonne variable explicative de $\mathcal{Y}$, car elle n'explique que plus ou moins 2% de celle-ci.

i) $cov\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\} = 0,22$. Les deux variables sont sans surprise corrélées positivement. Plus la Belgique marque de points lors d'un match, plus elle en marque lors de l'autre match.

4.16

a)

Table 3 – Table de contingence pour $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$

	$\mathcal{X}=0$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=3$	$\sum_{\Omega_\mathcal{X}}$
$\mathcal{Y}=1$	0	1,52%	3,04%	71,44%	76%
$\mathcal{Y}=0$	4,8%	4,8%	4,32%	10,08%	24%
$\sum_{\Omega_\mathcal{Y}}$	4,8%	6,32%	7,36%	81,52%	

b) $P_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(0,1) = 0\% \neq P_\mathcal{X}(0)P_\mathcal{Y}(1) = 4,8\% \times 76\%$.
Il n'y a pas indépendance entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

Table 4 – Table de contingence pour $P_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$

	$\mathcal{X}=0$	$\mathcal{X}=1$	$\mathcal{X}=2$	$\mathcal{X}=3$
$\mathcal{Y}=0$	100%	75,95%	58,70%	87,63%
$\mathcal{Y}=1$	0%	24,05%	41,30%	12,37%
$\sum_{\Omega_\mathcal{Y}}$	1	1	1	1

c)

d) $E\{\mathcal{X}\} = 2,6560$
$V\{\mathcal{X}\} = 0,6401$

e) $E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=0\} = 1,82$
$E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 2,92$

f) $E\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 2,6560$

g) $V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=0\} = 1,3876$
$V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}=1\} = 0,1136$

h) $E\{V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 0,4194$

$V\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} = 0,2207$

0,4194 + 0,2207 = 0,6401

i) $\mathcal{Y}$ n'est pas une bonne variable explicative de $\mathcal{X}$, car elle n'explique que plus ou moins 34% de celle-ci.

j) $cov\{\mathcal{X};\mathcal{Y}\} = 0,2006$.

Les deux variables sont sans surprise corrélées positivement. Plus Nadal gagne de sets, plus la chance qu'il ait gagné le premier set augmente. Et vice-versa, s'il a gagné le premier set, il a tendance à gagner plus de sets.