MATH0062-1 - Éléments du Calcul des Probabilités
Projet 1

Généralités

Le premier travail est inspiré du jeu télévisé "The Wall", lui-même inspiré de la planche de Galton. Ce travail a pour but de familiariser les étudiants avec la notion d'arbre de probabilités et avec la méthode de Monte-Carlo. Cette dernière, inventée dans les années 1940 par John von Neumann, Stanislaw Ulam et Nicholas Metropolis, permet d'évaluer une intégrale, en particulier l'espérance d'une variable aléatoire, là où une approche analytique ou déterministe serait difficile, voire impossible.

Ce travail devra être réalisé par groupe de deux. Chaque groupe devra rendre d'une part un rapport dont le nombre de pages conseillé (hormis annexes) est de 4 et d'autre part ses codes sources MATLAB. Ce rapport devra respecter les indications du guideline `http://www.montefiore.ulg.ac.be/~lduchesne/proba/guidelines.pdf`.
Toutes vos questions pour ce projet doivent être envoyées à l.duchesne@uliege.be.

Le travail devra être rendu sous forme d'archive `.zip` au plus tard pour le dimanche 18/03/2018 23h59 via la plateforme `http://submit.montefiore.ulg.ac.be/`.

Notez qu'au delà de la deadline, il ne sera plus possible de rendre le projet.

Présentation du problème

Un ami vous propose de jouer à un jeu de hasard inspiré de la planche de Galton. Ce jeu est composé d'un panneau vertical sur lequel des clous ont été plantés de façon régulière. Le panneau est composé de neuf entrées, neuf sorties et dix rangées de clous. Il est représenté schématiquement sur la figure 1, où les angles correspondent aux clous. Le but du jeu est de choisir une des neuf entrées et d'y laisser tomber une boule. La boule est déviée par les clous de façon aléatoire jusqu'à atteindre une des neuf sorties. La sortie désignée par la boule détermine le résultat de l'expérience. S'il est positif, le joueur qui a lâché la boule gagne de l'argent. S'il est négatif, le joueur perd de l'argent. Les gains ou pertes par sortie sont décrits dans la table 1.

Notez que la boule ne peut passer par les extrémités de la planche. Les numéros en gris sur la figure 1 représentent par rangée les positions par lesquelles une boule peut passer.

Avant de jouer contre votre ami, vous souhaitez réfléchir à la meilleure stratégie pour maximiser vos gains en utilisant la théorie des probabilités. Pour cela, vous émettez les hypothèses suivantes :

- la boule rencontre un clou à chaque rangée ;
- la probabilité que la boule soit déviée vers la gauche est égale à la probabilité que la boule soit déviée vers la droite et vaut $\frac{1}{2}$, sauf aux extrémités des rangées impaires.

Le travail se décompose en deux parties :

1. Recherche d'une solution exacte : l'objectif de cette partie est de démontrer votre compréhension de la méthode de Lehman & Leighton et votre capacité à l'adapter à un problème particulier.
2. Recherche d'une solution approchée par simulation : l'objectif de cette partie est d'utiliser la méthode de Monte-Carlo et d'en comprendre les avantages et limitations.

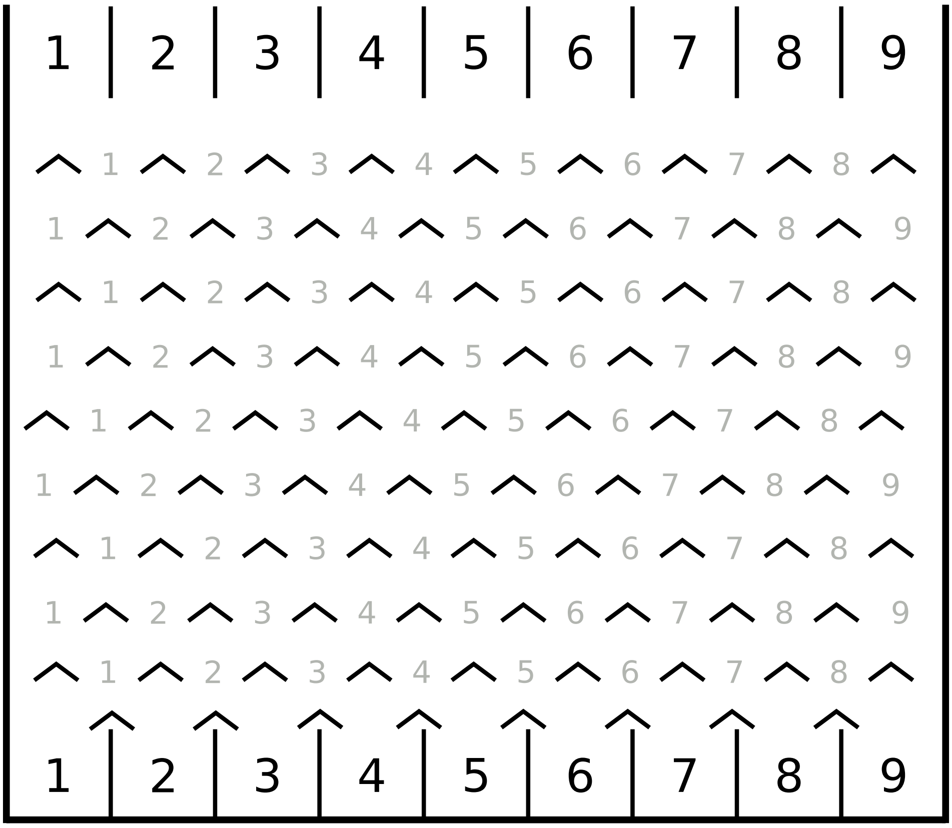

FIGURE 1 – Planche du jeu complet.

Position de sortie	Gain ou perte (en €)
1	1
2	-3
3	5
4	-5
5	8
6	-7
7	7
8	-2
9	1

TABLE 1 – Gains ou pertes du joueur en fonction de la position de sortie.

Questions

1. **Méthode de Lehman & Leighton**
   Nous allons commencer par étudier une planche plus petite, où il y a seulement quatre entrées, trois sorties et trois rangées (figure 2), afin de simplifier le problème. Déterminez, en appliquant la méthode de Lehman et Leighton, pour chaque sortie la probabilité que la boule y tombe respectivement dans les cas où :
   (a) le joueur choisit la position initiale de la boule au hasard ;
   (b) le joueur choisit toujours la rangée la plus à gauche (la 1).

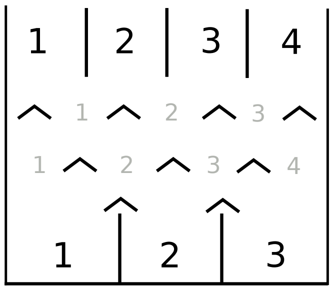

FIGURE 2 – Planche du jeu simplifié.

2. **Méthode de Monte Carlo**
   (a) Estimez la probabilité de chaque position de sortie d'une part dans le cas où le joueur choisit l'entrée au hasard et d'autre part quand il choisit toujours l'entrée la plus à gauche (la 1) à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Pour ce faire, implémentez une fonction permettant de simuler une partie de jeu pour le jeu simplifié (fig. 2). Cette fonction prend en entrée la position initiale de la boule et renvoie en sortie la position de sortie. Ensuite, générez un vecteur dont les éléments sont obtenus en utilisant la fonction précédemment implémentée et dont la taille est de 10^4. La fréquence relative des sorties sert d'*estimateur* de la probabilité demandée. Comparez vos résultats avec les valeurs théoriques calculées précédemment.
   (b) Implémentez maintenant une fonction qui permet de simuler une partie pour le jeu complet (voir fig. 1). Cette fonction prend en entrée la position initiale et renvoie la position de sortie de la boule. Estimez l'espérance de gain du joueur lorsque celui-ci choisit l'entrée au hasard à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Pour ce faire, générez des vecteurs dont les éléments sont obtenus en utilisant la fonction implémentée et dont la taille est respectivement de 10, 10^2, 10^3 et 10^4. Les moyennes respectives de ces vecteur servent d'*estimateurs* de l'espérance demandée. Que constatez-vous ? Qu'observez-vous lorsque la taille des vecteurs augmentent ?
   (c) Remarquez que réaliser le point (b) peut conduire à des résultats fort différents d'une fois à l'autre. Pour éviter ce problème, répétez désormais 1000 fois l'expérience décrite au point (b) [1]. Calculez dans les quatre cas la moyenne et la variance des 1000 estimateurs de l'espérance du gain. Présentez vos résultats sous forme d'un tableau. Qu'observez-vous lorsque la taille des vecteurs augmente ? Serait-il intéressant de réaliser l'expérience avec une taille de vecteur de 10^5 ?

1. Utilisez à nouveau des vecteurs dont la taille est respectivement de 10, 10^2, 10^3 et 10^4

(d) Utilisez la méthode de Monte-Carlo pour déterminer si choisir une entrée particulière plutôt qu'aléatoirement permet d'augmenter l'espérance de gain. Si c'est le cas, donnez l'entrée qui permet de maximiser l'espérance de gain du joueur.

(e) Définissons une variable aléatoire $\mathcal{X}$ représentant le nombre de fois où la boule a été déviée vers la droite au cours d'une partie, dans le cas où le joueur choisit toujours l'entrée centrale pour commencer et où l'on considère que la planche est tellement large que la boule n'atteint jamais les extrémités avant de sortir (à chaque rangée, elle a une probabilité de $1/2$ de tomber à gauche ou à droite). Quelle est la loi suivie par $\mathcal{X}$? Calculez l'espérance et la variance de $\mathcal{X}$ si la boule rencontre 9 clous avant d'atteindre une des sorties.

(f) Définissons maintenant la variable aléatoire $\mathcal{Y} = \mathcal{X} - E\{\mathcal{X}\}$. Si le nombre de sorties est suffisamment grand, on peut montrer que l'on peut approcher la distribution de $\mathcal{X}$ (et donc de $\mathcal{Y}$) par une loi gaussienne. Citez le théorème qui permet de l'affirmer.
Soit $\mathcal{Y} \sim \mathcal{N}(0, 2)$ (où 2 est la variance de $\mathcal{Y}$). Soit la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ = *rapport entre les résultats de deux parties indépendantes*, où le résultat d'une partie est représenté par la variable aléatoire $\mathcal{Y}$. Répétez 1000 fois l'expérience suivante : générer des vecteurs dont les éléments suivent la loi de probabilité étudiée et dont la taille est de respectivement 10^2, 10^3, 10^4 et 10^5. Calculez dans les quatre cas la moyenne et la variance des 1000 estimateurs de l'espérance de $\mathcal{Z}$. Présentez vos résultats sous forme d'un tableau. Que constatez-vous ? Comment expliquez-vous ce phénomène ?

Suggestions

Les fonctions suivantes de Matlab peuvent vous être utiles : mean, var, rand, randi. Lisez bien la documentation des fonctions avant de les utiliser.