

# Cryptographie à clé publique

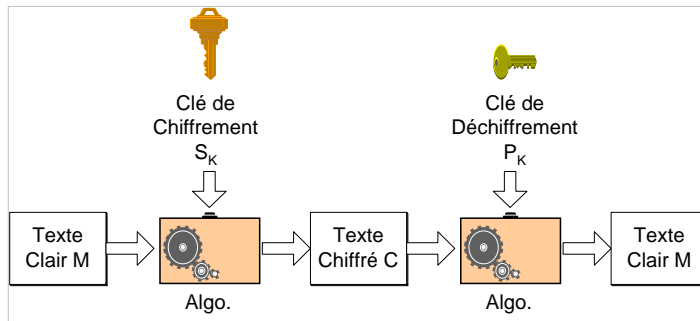
1

## Les systèmes à clé publique

- Systèmes symétriques :
  - même clé pour le chiffrement et le déchiffrement
  - Problèmes :
    - transmission de la clé
    - 1 clé par destinataire
- Système asymétrique :
  - 2 clés distinctes avec impossibilité de déduire l'une de l'autre.
  - Une des clés peut être publiée et distribuée librement (sous certaines conditions)

Chiffrement asymétrique - 2

## Schéma général



Chiffrement asymétrique - 3

## Application des systèmes à clé publique

- Classification des utilisations en 3 catégories :
- **Chiffrement/déchiffrement** (fournir le secret)
- **Signatures numériques** (fournir l'authentification)
- **Échange de clés** (ou des clefs de session)
- quelques algorithmes conviennent pour tous les usages, d'autres sont spécifiques à un d'eux

Chiffrement asymétrique - 4

## Les systèmes à clé publique

- Concept date de 1976 – Diffie et Hellman
- Première implémentation : 1978 – Rivest, Shamir, Adleman (RSA)
- La sécurité de tels systèmes repose sur des problèmes calculatoires
  - RSA : factorisation de grands entiers : NP
  - ElGamal : logarithme discret d'un corps fini : NP
  - Chor Rivest : problème du sac à dos : NPC
  - ...

Chiffrement asymétrique - 5

## Sécurité des schémas à clé publique

- La recherche des clés par force brute est toujours théoriquement possible
  - mais les clefs utilisées sont trop grandes (> 512bits)
- la sécurité se fonde sur une assez grande différence en difficulté entre les problèmes faciles (dé/chiffrement) et difficiles (cryptanalyse)
  - plus généralement le problème difficile est connu, il est juste trop difficile à réaliser en pratique
  - exige l'utilisation des nombres très grands
- Constatation : lent comparé aux chiffrements symétriques

Chiffrement asymétrique - 6

## Les systèmes à clé publique

- Remarque :
  - Un système à clé publique ne peut jamais être inconditionnellement sûr.
    - Essayer tous les  $M$  possibles donnant  $C$  (connu) avec la clé publique
    - → étude exclusive de la sécurité calculatoire de ces systèmes
- Fonction à sens unique à trappe.
  - Sens unique :  $E_k$  facile (injective),  $D_k$  difficile
    - Remarque :  $\nexists$  fonction démontrée
  - Trappe : la connaissance de la clé de déchiffrement rend la fonction bijective

Chiffrement asymétrique - 7

## Systemes symétriques

Rappels théoriques

8

## Rappels

### ■ Théorème de Fermat :

- Si  $p$  est premier,  $a > 0$  et  $p \nmid a$  :
  - $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
  - $a^p \equiv a \pmod{p}$

### ■ Fonction totient d'Euler

- Si  $p$  est premier :  $\phi(p) = p - 1$
- Si  $p, q$  sont premier et  $n = pq$  :  $\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$

### ■ Théorème d'Euler

- Si  $(a, n) = 1$  :
  - $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
  - $a^{\phi(n)+1} \equiv a \pmod{n}$

Chiffrement asymétrique - 9

## Rappels

### ■ Corollaire du théorème d'Euler

- Si  $p, q$  sont premiers,  $n = pq$  et  $0 < m < n$ 
  - $m^{\phi(n)+1} = m^{(p-1)(q-1)+1} \equiv m \pmod{n}$
  - $M^{k\phi(n)+1} \equiv [(m^{\phi(n)})^k * m] \pmod{n}$ 
    - $\equiv ((1)^k * m) \pmod{n}$  (par le th d'Euler)
    - $\equiv m \pmod{n}$

### ■ Tests de primalité :

- Par les tests de Fermat, Solovay Strassen, ...

### ■ Théorème du reste chinois :

- Permet de manipuler de grand nombre modulo  $M$  en termes de tuples de plus petit nombres

Chiffrement asymétrique - 10

## Rappels

- Algorithme d'Euclide :
  - Calcul du pgcd
- Algorithme d'Euclide étendu
  - Calcul du pgcd et de l'inverse modulaire

## Merkle - Hellman

## Introduction

- Définition du problème :
  - Soit un havresac de capacité  $T$  et un ensemble  $S$  d'objets qui occupent les espaces  $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$
  - Trouver un vecteur de sélection  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  satisfaisant la relation  $\sum(a_i * v_i) = T$
- Exemple :
  - $a = \{17, 38, 73, 4, 11, 1\}$  et  $T = 53 = 38 + 4 + 11$  donc  $V = \{0, 1, 0, 1, 1, 0\}$
  - Pas de solution pour  $T = 45$
  - Si  $T$  et  $a$  sont très grands, c'est beaucoup plus compliqué

Chiffrement asymétrique - 13

Problème du Sac à dos : empiler différents types d'objets avec chacun un poids différent : faire un nouveau tas d'objets avec un poids total donné

## Principe

- Idée de base :
  - coder le message comme une solution d'une suite de problèmes d'empilement.
  - Un bloc de texte en clair de longueur égale au nombre d'objets dans le tas sélectionnerait des objets
    - Les bits du texte en clair correspondraient aux valeurs des  $v_i$  : un 1 signifierait que l'objet est présent et 0 un objet absent
  - Et le texte chiffre serait la somme résultante
- Exemple :
  - M: 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0
  - Tas: 1 5 6 11 14 20 1 5 6 11 14 20
  - C: 1+5+6+20 = 32 5+11+14 = 30

Chiffrement asymétrique - 14

## Empilement et clés

- Il y a 2 problèmes d'empilement
  - 1 soluble en temps linéaire
  - 1 soluble en temps exponentiel
- L'empilement facile peut être transformé pour créer un empilement difficile
- Clé publique : empilement difficile, peut juste chiffrer
- Clé privée : empilement facile qui donne un moyen simple de déchiffrer les messages

Chiffrement asymétrique - 15

Ceux qui ne connaissent pas la clé privée sont obligés de résoudre le problème d'empilement difficile

## Empilement facile

- Empilement facile :
  - Si la liste des poids est super croissante (tout terme est plus grand que la somme des termes qui la précède)
  - Solution :
    - prendre le poids total et le comparer avec le plus grand nombre de la suite.
      - Si ce poids total est  $<$  à ce nombre, alors il n'est pas dans le tas
      - Si ce poids total est  $>$  à ce nombre, alors il est dans le tas
    - Réduire le poids du tas à créer de ce nombre et passer au plus grand nombre suivant de la suite
    - Répéter jusqu'à ce que ce soit terminé
    - Si le poids total a pu être ramené à 0 : il y a une solution

Chiffrement asymétrique - 16



## Merkle-Hellman

- Empilement difficile :
  - On ne connaît pas d'algorithme rapide
  - Tester méthodiquement toutes les solutions possibles
  - Ces algorithmes sont exponentiels
- Merkle-Hellman : exploite cette propriété
  - Clé privée : suite de poids super croissante
  - Clé publique : suite de poids pour un problème d'empilement normal avec la même solution
  - Les auteurs ont trouvé une technique pour transformer un tas super croissant en un havresac régulier correspondant

Chiffrement asymétrique - 17

## Calcul de la clé publique

- Calcul de la clé publique à partir de la clé privée
  - Prendre une suite supercroissante
  - La multiplier par  $n$  modulo  $m$  avec
    - $m$  plus grand que la somme de tous les nombres de la suite
    - $n$  ne doit avoir aucun facteur commun avec aucun nombre de la suite

Chiffrement asymétrique - 18

## Algorithme

- Chiffrement :
  - additionner les termes où un 1 apparaît
- Déchiffrement :
  - Calculer  $n^{-1}$  tel que  $n * n^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$
  - Multiplier chaque valeur du texte chiffré par  $n^{-1} \pmod{m}$
- En pratique
  - 250 éléments
  - Chaque terme a une longueur de 200 à 400 bits
  - Le module a une longueur de 100 à 200 bits

Chiffrement asymétrique - 19

## Exemple

- Générer S qui est une séquence super-croissante de m entiers: par exemple 1,2,4,9
- Choisir un multiplicateur w et un module n
- Soit  $w = 15$  et  $n = 17$ 
  - $1 * 15 \pmod{17} \Rightarrow 15$
  - $2 * 15 \pmod{17} \Rightarrow 13$
  - $4 * 15 \pmod{17} \Rightarrow 9$
  - $9 * 15 \pmod{17} \Rightarrow 16$
- Le havresac difficile est donc  $H = \{15, 13, 9, 16\}$

Chiffrement asymétrique - 20

## Exemple

- Le message est traité comme une séquence de bits
  - $P = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_k]$
- On le divise en blocs de m bits
  - $P_0 = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_m], P_1 = [p_{m+1}, p_{m+2}, p_{m+3}, \dots, p_{2m}], \dots$
- On utilise chaque bloc comme vecteur V du problème de havresac
- Soit  $P = 0100101110100101 \Rightarrow 0100\ 1011\ 1010\ 0101$ 
  - $[0, 1, 0, 0] * [15, 13, 9, 16] \Rightarrow 13$
  - $[1, 0, 1, 1] * [15, 13, 9, 16] \Rightarrow 40$
  - $[1, 0, 1, 0] * [15, 13, 9, 16] \Rightarrow 24$
  - $[0, 1, 0, 1] * [15, 13, 9, 16] \Rightarrow 29$
- Le message encrypté est donc 13, 40, 24, 29 en utilisant le havresac public (la clef publique)  $H = [15, 13, 9, 16]$

Chiffrement asymétrique - 21

## Exemple

- Le destinataire légitime connaît le havresac simple S et les valeurs de w et de n
- Il peut donc déterminer  $w^{-1}$ 
  - Exemple avec  $w = 15$  et  $n = 17$ ,  $w^{-1}$  est 8:  $15 * 8 = 120 = 7 * 17 + 1$
- Exemple
  - $13 * 8 \bmod 17 = 104 \bmod 17 = 2 = [1, 2, 4, 9] * [0100]$
  - $40 * 8 \bmod 17 = 320 \bmod 17 = 14 = [1, 2, 4, 9] * [1011]$
  - $24 * 8 \bmod 17 = 192 \bmod 17 = 5 = [1, 2, 4, 9] * [1010]$
  - $29 * 8 \bmod 17 = 232 \bmod 17 = 11 = [1, 2, 4, 9] * [0101]$
- et le texte en clair est 0100 1011 1010 0101  
 $\Rightarrow 0100101110100101$

Chiffrement asymétrique - 22

## Sécurité :

- Herlestam (1978) : souvent un bit de texte clair pouvait être retrouvé
- Shamir (1979) : l'algorithme peut être cassé dans certaines circonstances
- Shamir-Zippel (82-83-84) : failles dans la transformation qui permettent de reconstruire la suite super-croissante à partir de la suite normale

## RSA (Rivest-Shamir-Adleman)

### Présentation

Il est basé sur un chiffrement exponentiel.

Sa sécurité repose sur la fonction unidirectionnelle suivante:

Le calcul du produit de 2 nombres premiers est aisé.

La factorisation d'un nombre en ses deux facteurs premiers est beaucoup plus complexe.

## Généralités

- par Rivest, Shamir et Adleman du MIT en 1977
- Système le + connu et le + largement répandu
- basé sur l'élevation à une puissance dans un champ fini sur des nombres entiers modulo un nombre premier
  - Le nombre d'exponentiation prend environ  $O((\log n)^3)$  opérations → facile
- emploi de grands nombres entiers (par exemple 1024 bits)

Chiffrement asymétrique - 25

## Généralités

- Chiffrement :  $C = M^e \bmod n$
- Déchiffrement :  $M = C^d \bmod n$
- Les deux clés d et e sont interchangeables
- sécurité due au coût de factoriser de grands nombres
  - Le nombre de factorisation prend environ  $O(e^{\log n \log \log n})$  opérations → difficile
- Usage :
  - confidentialité, authentification, combinaison des 2

Chiffrement asymétrique - 26

## Principe

- 2 clés :
  - Clé publique : une paire  $(e,n)$
  - Clé privée : une paire  $(d,n)$
- Première étape : choisir  $n$ 
  - Valeur assez élevée
  - Produit de 2 nombres premiers très grands  $p$  et  $q$
  - Typiquement :  $p$  et  $q$  ont 100 chiffres décimaux  $\Rightarrow n$  a 200 chiffres
  - Taille de  $n = 512$  bits, ou 768 ou 1024 selon le niveau de sécurité souhaité

Chiffrement asymétrique - 27

## Principe

- Deuxième étape :
  - Choisir un très grand entier  $e$ 
    - Relativement premier à  $(p-1)*(q-1)$ 
      - Astuce : choisir  $e$  comme un nombre plus grand que  $p-1$  et  $q-1$
  - Choisir  $d$  tel que
    - $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$
- Troisième étape : on jette  $p$  et  $q$

Chiffrement asymétrique - 28

## Justification de l'inversibilité

- Par le théorème d'Euler et de Fermat :
  - $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n \Leftrightarrow a^{\phi(n)} \pmod n = 1$  où  $(a,n)=1$
- Dans le RSA on a :
  - $n = p \cdot q$
  - $\phi(n)$  donne le nombre d'entiers positifs plus petits que  $n$  et relativement premiers à  $n$ 
    - Si  $p$  est premier,  $\phi(p)=p-1$
  - Si  $n = p \cdot q$ , avec  $p$  et  $q$  premiers
    - $\phi(n) = \phi(p) \cdot \phi(q) = (p-1) \cdot (q-1)$

Chiffrement asymétrique - 29

## Démonstration

- A cause de la façon de choisir  $e$  et  $d$ 
  - $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(n)} = k \cdot \phi(n) + 1$  pour un certain  $k$
- Puisque  $p$  est premier (corollaire d'Euler)
  - $M^{p-1} \equiv 1 \pmod p$  ;  $M^{k \cdot \phi(n)} \equiv 1 \pmod p$  ;  $M^{k \cdot \phi(n)+1} \equiv M \pmod p$
- Même chose pour  $q$ 
  - $M^{k \cdot \phi(n)+1} \equiv M \pmod q$
- Si on combine :
  - $(M^e)^d = M^{e \cdot d} = M^{k \cdot \phi(n)+1} \equiv M \pmod p = M \pmod q$   
 $= M \pmod n = M$

Chiffrement asymétrique - 30

## Résumé :

1. Génération de 2 nombres premiers  $p$  et  $q$
2. Calcul de  $n = p \cdot q$
3. Déterminer  $e$  tel que  $3 < e < \phi(n)$
4. Calculer  $d$  tel que  $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$
5. Clés
  - publique :  $(e, n)$       privée :  $(d, n)$
  - $p$  et  $q$  doivent rester secrets
6.  $C = M^e \pmod{n}$  et  $M = C^d \pmod{n}$  (confidentialité)

Chiffrement asymétrique - 31

## Exemple

- Soient  $p = 11$ ,  $q = 13 \rightarrow n = 143$
- $\phi(n) = 120$  (nombre d'éléments relativement premiers à  $n$  et  $< n$ )
- $e = 23$  (on a  $(e, \phi(n))$  ce qui permettra de trouver  $d$ )
- $d = 47$  (inverse modulaire de  $e$  sur  $\mathbb{Z}_n$ )
- Clé publique :  $(23, 143)$  – clé privée :  $(47, 143)$

Chiffrement asymétrique - 32

1 –  $p$  et  $q$  sont bien premiers

2 – soient 2 nbres aléatoires : 61% de chances que relativement premiers entre eux

Remarque : clé de 8 bits !!!!!



## Exemple ...

- Normalement, les données sont compressées puis découpées en morceaux de taille  $< n$

- Codage pour l'exemple

1 car = 1 car ASCII :

j u s t e u n t e s t  
106 117 115 116 101 32 117 110 32 116 101 115 116

```
c = m^e mod n
c1 = 106^23 mod 143 = 46
c2 = 117^23 mod 143 = 13
c3 = 115^23 mod 143 = 136
c4 = 116^23 mod 143 = 51
c5 = 101^23 mod 143 = 30
c6 = 32^23 mod 143 = 76
c7 = 117^23 mod 143 = 13
c8 = 110^23 mod 143 = 11
c9 = 32^23 mod 143 = 76
c10 = 116^23 mod 143 = 51
c11 = 101^23 mod 143 = 30
c12 = 115^23 mod 143 = 136
c13 = 116^23 mod 143 = 51
```

Chiffrement asymétrique - 33

1 -  $< n$  car les opérations effectuées sont des exponentiations modulo  $n$ .

## Exemple ...

- Le déchiffrement s'effectue en utilisant la clé (47,143)

```
m = c^d mod n
m1 = 46^47 mod 143 = 106 = 'j'
m2 = 13^47 mod 143 = 117 = 'u'
m3 = 136^47 mod 143 = 115 = 's'
m4 = 51^47 mod 143 = 116 = 't'
m5 = 30^47 mod 143 = 101 = 'e'
m6 = 76^47 mod 143 = 32 = ' '
m7 = 13^47 mod 143 = 117 = 'u'
m8 = 11^47 mod 143 = 110 = 'n'
m9 = 76^47 mod 143 = 32 = ' '
m10 = 51^47 mod 143 = 116 = 't'
m11 = 30^47 mod 143 = 101 = 'e'
m12 = 136^47 mod 143 = 115 = 's'
m13 = 51^47 mod 143 = 116 = 't'
```

Chiffrement asymétrique - 34

Rmq : ça fonctionne car ascii : 0-127 et  $127 < 143$

N doit être plus grand que les nombres que l'on souhaite chiffrer....

## Remarques

- Il n'est pas très astucieux de choisir d'aussi petites valeurs :
  - On peut retrouver  $d$  très facilement :
    - 143 ne peut pas être autre chose que  $11 \cdot 13$
    - On peut donc le retrouver en 11 essais
- En pratique :
  - prendre de très grandes valeurs de  $p$  et  $q$
  - Pour trouver ces grandes valeurs :
    - Jacobi + test de Solovay-Strassen
    - Rabin-Miller
    - ...

## RSA

Sécurité

## Attaques

- 3 approches à attaquer RSA :
  - recherche par force brute de la clé (impossible étant donné la taille des données)
  - attaques mathématiques (basées sur la difficulté de calculer  $\phi(n)$ , la factorisation du module N)
  - attaques de synchronisation (sur le fonctionnement du déchiffrement)
- L'approche mathématique prend 3 formes :
  - factoriser  $n=p*q$  et par conséquent trouver  $\phi(n)$  et puis d
  - déterminer  $\phi(n)$  directement et trouver d
  - trouver d directement

Chiffrement asymétrique - 37

## Problème de la factorisation

- Connaissances actuelles sur la factorisation
  - lentes améliorations au cours des années
    - Au mieux 130 chiffres décimaux (512) en août 99
  - meilleure amélioration : optimisation des algorithmes
  - excepté un changement dramatique : RSA 1024 est sûr
    - S'assurer p, q ont une telle taille et respecter les autres contraintes
  - Remarque :
    - trouver les 2 facteurs premiers p et q d'un nombre  $n=p*q$  où p et q sont de l'ordre  $10^{100} \Rightarrow n$  a une longueur égale à 200 chiffres décimaux  $\simeq 30$  millions d'années pour le casser
    - déterminer si un nombre de 200 chiffres est premier ou non : moins de 5 minutes (en 2002)

Chiffrement asymétrique - 38

## Attaque de synchronisation (timing attack)

- Développé dans le milieu des années 90's
- Exploitation des variations de synchronisation entre les opérations opérations
  - par exemple la multiplication par petit contre grand nombre
  - ou instruction IF changeant les instructions a exécuter
- Impliquer la taille d'opérande basée sur le temps pris
- RSA exploite le temps pris dans l'élévation à une puissance
- contre mesures
  - employer des temps constant d'élévation à une puissance
  - ajouter des délais aléatoires
  - rendre non visible les valeurs utilisées dans les calculs

Chiffrement asymétrique - 39

## Conseils d'utilisation du RSA

- Ne jamais utiliser de valeur n trop petite
- Ne pas utiliser de clé secrète trop courte ( $< \sqrt{n}$ )
- N'utiliser que des clés fortes (p-1 et q-1 ont un grand facteur premier)
- Ne pas chiffrer de blocs trop courts
- Ne pas utiliser de n communs à plusieurs clés
- Si (d,n) est compromise ne plus utiliser n
- Ne jamais chiffrer ou authentifier un message provenant d'un tiers sans le modifier

Chiffrement asymétrique - 40

## Exemples – Rivest : 1978

- Le meilleur algorithme connu pour factoriser un nombre de 129 digits requiert :
  - 40 000 trillions d'années soit  $40 \cdot 10^{15}$  années
  - En supposant l'utilisation d'un superordinateur capable d'effectuer
    - 1 multiplication de nombres à 129 digits en 1 ns
  - Rappel : age de l'univers :  $10^{10}$  années

Chiffrement asymétrique - 41

## Records de factorisation de grands nombres

Years	Number of decimal digits	Number of bits	Required computational power (in MIPS-years)
1974	45	149	0.001
1984	71	235	0.1
1991	100	332	7
1992	110	365	75
1993	120	398	830

Chiffrement asymétrique - 42

## Estimations

Year	Number of bits of N	Number of decimal digits of N	Method	Estimated amount of computations
1994	430	129	QS	5000 MIPS-years
1996	433	130	GNFS	750 MIPS-years
1998	467	140	GNFS	2000 MIPS-years
<b>1999</b>	<b>467</b>	<b>140</b>	<b>GNFS</b>	<b>8000 MIPS-years</b>

Chiffrement asymétrique - 43

## Recommended key sizes for RSA

### Old standard:

Individual users

~~512 bits  
(155 decimal digits)~~

### New standard:

Individual users

768 bits  
(231 decimal digits)

Organizations (short term)

1024 bits  
(308 decimal digits)

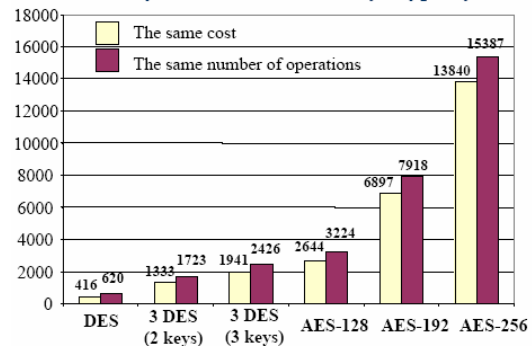
Organizations (long term)

2048 bits  
(616 decimal digits)

Chiffrement asymétrique - 44

## Comparaisons RSA - DES

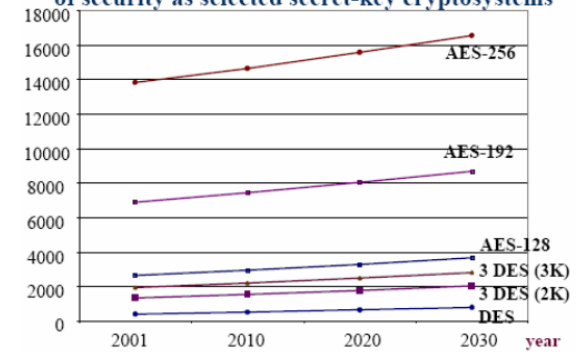
Keylengths in **RSA** providing the same level of security as selected secret-key cryptosystems



Chiffrement asymétrique - 45

## Comparaisons RSA - DES

Keylengths in **RSA** providing the same level of security as selected secret-key cryptosystems



Chiffrement asymétrique - 46

## Challenge RSA

Lentgh of N in bits	Length of N in decimal digits	Award for factorization
576	174	\$10,000
640	193	\$20,000
704	212	\$30,000
768	232	\$50,000
896	270	\$75,000
<b>1024</b>	<b>309</b>	<b>\$100,000</b>
1536	463	\$150,000
2048	617	\$200,000

Chiffrement asymétrique - 47

## El Gamal

48



## Présentation

- Algorithme à clef publique, datant de 1984, utilisé surtout comme base de la norme U.S. de signature électronique
- Basé sur la difficulté de calculer des logarithmes discontinus sur des champs finis.

Chiffrement asymétrique - 49

## Méthode pour générer les clés

- Choisir
  - un nombre premier  $p$  très grand et tel que  $p - 1$  a un grand facteur premier
  - 2 nombres aléatoires  $g$  et  $x$ , tels que
    - $g \in (0 \dots p - 1)$  et  $\forall z \in (1 \dots p - 2) g^z \neq 1 \pmod p$ ,  $x \in (1 \dots p - 2)$
- Ensuite calculer
  - $y = g^x \pmod p$
- Clé publique :  $(y, g, p)$ 
  - $g$  et  $p$  peuvent être partagée par un groupe d'utilisateurs
- Clé privée :  $(x)$

Chiffrement asymétrique - 50

## Chiffrement El Gamal

### ■ Chiffrement

- Soit  $M$ ,  $k$  un nombre aléatoire,  $(k, p) \neq 1$ 
  - $K$  n'est connu que de celui qui chiffre et différent à chaque msg
- Calculer :
  - $a = g^k \text{ mod } p$
  - $b = y^k \text{ mod } p$
- La paire  $(a, b)$  forme le texte chiffré  $\rightarrow C = 2M$

### ■ Déchiffrement :

- $M = b/a^x \text{ mod } p$

Chiffrement asymétrique - 51

## Remarque

- $y^k$  est un masque qui est appliqué sous forme multiplicative à  $M$ .
- Pour déchiffrer le message, il faut
  - soit trouver directement un masque jetable (en l'absence de la connaissance de  $a$ ,  $y^k$  est une suite parfaitement imprévisible)
  - Soit trouver la clé privée  $x$  qui est la solution de  $y = g^x \text{ mod } p$  (donc trouver le logarithme discret)

Chiffrement asymétrique - 52

## Inversibilité de la méthode

- Puisque :
  - $a^x \equiv g^{kx} \pmod{p}$
  - On a :
    - $b/a^x \equiv y^k M / a^x \pmod{p} \equiv g^{xk} M / g^{xk} \equiv M \pmod{p}$
- Ou encore  $(D_k(E_k(M)))=M$ 
  - $D_k(E_k(M)) = ((M \cdot y^k \pmod{p}) / (g^k \pmod{p})^x) \pmod{p}$   
 $= ((M \cdot y^k \pmod{p}) / (g^{xk} \pmod{p})) \pmod{p}$   
 $= ((M \cdot y^k \pmod{p}) / (y^k \pmod{p})) \pmod{p} = M$

Chiffrement asymétrique - 53

## Exemple

- Soient  $p=2579$ ,  $g=2$ ,  $x=765$
- $S_k = (765)$
- $P_k = (2579, 2, 949)$  car  $2^{765} \pmod{2579} = 949$
- Pour chiffrer  $M = 1299$ , on choisit  $k = 853$ 
  - $a = 2^{853} \pmod{2579} = 435$
  - $b = 1299 \cdot 949^{853} \pmod{2579} = 2396$
- On peut vérifier que effectivement :
  - $2396 / (435^{765}) \pmod{2579} = 1299$

Chiffrement asymétrique - 54

## Efficacité et sécurité

- Calculs comparables à ceux du RSA → ordre de performance identique (2 fois plus lent)
- Inconvénient : la taille des données chiffrée est  $2^*$  celle des données en clair
- La recherche de la clé privée ( $x$ ) à partir de la clé publique est équivalente au problème du logarithme discret (NP). MAIS il n'est pas prouvé que la cryptanalyse d'un message chiffré avec ElGamal soit équivalente au logarithme discret.

Chiffrement asymétrique - 55

## Efficacité et sécurité

- Les techniques de cryptanalyse de ElGamal sont directement liées à celles de Diffie-Hellman ([Stinson]-ch5)

Chiffrement asymétrique - 56

## Comparaisons

57

## Asymétrique vs symétrique

### ■ Symétrique :

#### □ Avantages

- Rapidité (jusqu'à 1000 fois)
- Facilité d'implantation sur hardware
- Taille de clé : 128 bits (⇒ 16 caractères : mémorisable)

#### □ Inconvénients

- Nombre de clés à gérer
- Distribution des clés (authentification, confidentialité)
- Certaines propriétés (p.ex. signatures) sont difficiles à réaliser

Chiffrement asymétrique - 58

## Asymétrique vs symétrique

- Asymétriques :
  - Avantages :
    - Nombre de clé à distribuer est réduit par rapport aux clés symétriques
    - Distributions des clés facilités : pas besoin de l'authentification
    - Permet de signer des messages facilement
  - Inconvénients :
    - Taille des clés
    - Vitesse de chiffrement
- Problèmes propres aux 2 systèmes
  - La gestion des clés 'secrètes' reste le maillon faible
  - Sécurité basée sur des arguments empiriques plutôt que théorique

Chiffrement asymétrique - 59

## Références internet

- <http://www.bibmath.net/crypto/complements>
- <http://www.bibmath.net/crypto/moderne>
- <http://www.ulb.ac.be/di/scsi/markowitch/crypto/>
- <http://www.ift.ulaval.ca/~Mejri/cryptography/Notes/RSA.pdf>
- <http://www.cryptologie.com/>
- <http://abcdrfc.free.fr/rfc-vf/rfc2440/x1529.html>
- [www.hack.gr/users/dij/crypto/overview/rsa.html](http://www.hack.gr/users/dij/crypto/overview/rsa.html)
- [Home.ecn.ab.ca/~isavard/crypto/publ05.html](http://Home.ecn.ab.ca/~isavard/crypto/publ05.html)
- <http://193.48.37.48/~douillet/publications/crypto/node17.html>
- [http://www.cryptosec.org/article.php3?id\\_article=10](http://www.cryptosec.org/article.php3?id_article=10)
- <http://cui.unige.ch/tcs/cours/crypto/crypto7/crypto7.html>
- [http://members.tripod.com/irish\\_ronan/rsa/attacks.html](http://members.tripod.com/irish_ronan/rsa/attacks.html)

Chiffrement asymétrique - 60

## Références bibliographiques

- [Stinson] - ch5, ch6
- [Stallings] – ch 9
- [Schneier] – ch 19
- [Natkin] - 2.3

## Questions

- Vous devez pouvoir expliquer
  - Le concept des systèmes à clés publique
  - L'algorithme du sac à dos (Merkle-Hellman)
    - (principe, algorithme, justification, sécurité, ...)
  - L'algorithme du RSA
    - (principe, algorithme, justification, sécurité, ...)
  - L'algorithme de ElGamal
    - (principe, algorithme, justification, sécurité, ...)
- Vous devez pouvoir comparer et illustrer les différences entre les systèmes symétriques et asymétriques