Mathématiques appliquées

Prof. B. Dewals, Prof. Ch. Geuzaine

Vous trouverez ci-dessous quelques *exemples* de questions qui pourraient être posées à l'examen. Cette liste ne se veut en rien exhaustive, mais les questions qui y figurent se veulent représentative du type de questions susceptibles d'apparaitre à l'examen. Les exemples cités ci-dessous ne couvrent d'ailleurs pas toute la matière, alors que l'entièreté de ce qui a été présenté lors des séances théoriques fait partie de la matière à maîtriser pour l'examen. Notez que les questions ci-dessous ne sont généralement pas des questions de *restitution* mais elles ont pour ambition d'évaluer votre *compréhension* de la matière.

Cours 1

Soit l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$u_x + yu_y = 0$$

Dérivez la forme générale de la solution. De quelle type de condition supplémentaire faut-il disposer pour obtenir un problème bien posé ? Donnez un exemple.

Cours 2

La solution générale de l'équation d'ondes $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$ peut s'écrire sous la forme $u(x, t) = f(x + t) + g(x - t)$. Prouvez que la solution du problème aux valeurs initiales

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{for } -\infty < x < +\infty$$

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x),$$

est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds.$$

Cours 3

Utilisez le principe du maximum pour prouver que

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= f(x,t) \quad \text{for } 0 < x < l \text{ and } t > 0 \\ u(x,0) &= \phi(x) \\ u(0,t) &= g(t) \qquad u(l,t) = h(t) \end{aligned}$$

possède une solution unique.

Cours 5

On rappelle ci-dessous :

- la liste des cinq invariants de l'équation de diffusion ;
- les principales étapes de la démonstration de la solution de l'équation de diffusion.

On demande :

- Parmi les invariants, lesquels s'appliquent uniquement à l'équation de diffusion et lesquels s'appliquent également au *problème de diffusion* (équation + CI générale) ?
- On vous demande d'expliciter quel(s) invariant(s) est (sont) indispensable(s) à quelle(s) étape(s) de la démonstration. Justifier en détail.
- Indiquer et justifier le(s)quel(s) des invariants s'appliquent aussi à l'équation des ondes.

	Invariants de l'équation de diffusion
Invariant ①	La translation $u(x - y, t)$ d'une solution $u(x, t)$ est également solution.
Invariant ②	Une dérivée de la solution est également une solution.
Invariant ③	Une combinaison linéaire de plusieurs solutions reste une solution.
Invariant ④	Si $S(x, t)$ est une solution, alors l'intégrale $$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\,dy$$ est également une solution quelle que soit la fonction $g(y)$, pour autant que l'intégrale converge.
Invariant ⑤	Si $u(x, t)$ est une solution, alors la fonction *dilatée* $u(a^{1/2}\,x,\ a\,t)$ est également une solution, quel que soit le paramètre $a > 0$.

	Principales étapes de la démonstration
Etape 1	On cherche une solution de la forme $$Q(x,t) = g(p) \quad \text{where } p = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$$
Etape 2	On transforme l'EDP de départ en une EDO qu'on résout.
Etape 3	On fixe les constantes d'intégration sur base d'une condition initiale particulière (fonction de Heaviside).
Etape 4	On exprime la solution générale sous la forme : $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,dy$$ avec $S = \partial Q/\partial x$.

Cours 6

Soit le problème de diffusion suivant :

$$\begin{aligned}
&u_t = ku_{xx} \quad (0 < x < l, 0 < t < \infty)\\
&u(0,t) = u(l,t) = 0\\
&u(x,0) = \phi(x).
\end{aligned}$$

Montrez que la solution s'écrit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

et que les données initiales doivent satisfaire

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Cours 7

Dans un domaine borné, on considère l'équation de Laplace munie de conditions limites de Dirichlet sur toutes les frontières.

- La solution de l'équation existe-t-elle quelles que soient les valeurs (finies) imposées aux conditions limites ? Justifier.
- La solution de l'équation est-elle unique quelles que soient les valeurs (finies) imposées aux conditions limites ? Justifier.

Dans un domaine borné, on considère l'équation de Laplace munie de conditions limites de Neumann sur toutes les frontières.

- La solution de l'équation existe-t-elle quelles que soient les valeurs (finies) imposées aux conditions limites ? Justifier.
- La solution de l'équation est-elle unique quelles que soient les valeurs (finies) imposées aux conditions limites ? Justifier.

Cours 7

On considère deux repères cartésiens (x, y) et (x', y'). Ils partagent tous deux la même origine et le second est obtenu en appliquant au premier une rotation d'un angle θ (dans le sens trigonométrique). Comment s'écrit en termes des coordonnées (x', y') l'équation suivante :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ ?}$$

Démontrer.

On demande également d'écrire une solution axisymétrique de la même équation. Justifier.

Cours 7

La formule de Poisson s'écrit :

$$u(r,\theta) = (a^2 - r^2) \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + r^2} \frac{d\phi}{2\pi}$$

avec u la seule fonction harmonique dans un disque de rayon a, qui prend des valeurs égales à $h(\phi)$ sur la circonférence du disque. Les variables indépendantes (r, θ) désignent les coordonnées polaires.

On demande de fournir une interprétation de cette formule, et d'expliciter au moins une implication importante de la formule.

Cours 8

On considère l'équation suivante :

$$b(x, t)\, u_t + a(u)\, u_x = 0,$$

où a et b désignent des fonctions connues, quelconques mais régulières.

- Quel est l'*ordre* de cette équation aux dérivées partielles ?
- Préciser si l'équation est linéaire ou non linéaire, homogène ou non homogène. Justifier.
- Indiquer, en justifiant, si les méthodes de résolution suivantes peuvent s'appliquer :
    - méthode de séparation des variables,
    - méthode des caractéristiques.

Cours 8

On considère les six équations suivantes :

Equation ① $u_t + u_x = 0,$

Equation ② $u_t + a(x, t)\, u_x = 0,$

Equation ③ $b(x, t)\, u_t + a(x, t)\, u_x = 0,$

Equation ④ $u_t + u\, u_x = 0,$

Equation ⑤ $u_t + u^2\, u_x = 0,$

Equation ⑥ $b(x, t)\, u_t + u^2\, u_x = 0,$

Pour chacune de ces équations, indiquer si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses et justifier.

Proposition 1 - Les caractéristiques sont des droites.

			Brève justification
Equation ①	Vrai	Faux	
Equation ②	Vrai	Faux	
Equation ③	Vrai	Faux	
Equation ④	Vrai	Faux	
Equation ⑤	Vrai	Faux	
Equation ⑥	Vrai	Faux	

Proposition 2 - L'inconnue *u* est une constante le long des caractéristiques.

			Brève justification
Equation ①	Vrai	Faux	
Equation ②	Vrai	Faux	
Equation ③	Vrai	Faux	
Equation ④	Vrai	Faux	
Equation ⑤	Vrai	Faux	
Equation ⑥	Vrai	Faux	

Proposition 3 - Les caractéristiques ne se croisent jamais.

			Brève justification
Equation ①	Vrai	Faux	
Equation ②	Vrai	Faux	
Equation ③	Vrai	Faux	
Equation ④	Vrai	Faux	
Equation ⑤	Vrai	Faux	
Equation ⑥	Vrai	Faux	

Proposition 4 - La pente des caractéristiques est égale à la valeur de l'inconnue *u*.

			Brève justification
Equation ①	Vrai	Faux	
Equation ②	Vrai	Faux	
Equation ③	Vrai	Faux	
Equation ④	Vrai	Faux	
Equation ⑤	Vrai	Faux	
Equation ⑥	Vrai	Faux	

Proposition 5 - La condition initiale imposée détermine si les caractéristiques se croisent ou pas. .

			Brève justification
Equation ①	Vrai	Faux	
Equation ②	Vrai	Faux	
Equation ③	Vrai	Faux	
Equation ④	Vrai	Faux	
Equation ⑤	Vrai	Faux	
Equation ⑥	Vrai	Faux	

Cours 9

On considère un domaine bidimensionnel de forme carrée et de côtés de longueur L. Celui-ci est discrétisé uniformément par $(N + 1) \times (N + 1)$ nœuds répartis avec une entre-distance constante $\Delta x = \Delta y = L / N$:

$$(x_j\ , y_k) = (j\ \Delta x,\ k\ \Delta x\ ), \qquad \text{avec} \quad j = 0 \ldots N \quad \text{et} \quad k = 0 \ldots N.$$

- Ecrire un schéma du second ordre de précision pour discrétiser l'équation de Laplace à l'intérieur du domaine (c.à.d. en un nœud non voisin des limites du domaine : $2 \leq j \leq N - 2$ et $2 \leq k \leq N - 2$).
- Démontrer le second ordre de précision du schéma proposé.
- Exprimer la solution discrète $u_{j,k} = u(x_j, y_k)$ en fonction des valeurs de la solution aux nœuds voisins. Commenter et établir un lien avec le *principe du maximum*.
- Indiquer le nombre d'équation(s) discrètes à résoudre numériquement pour trouver la valeur de l'inconnue $u_{j,k}$ en chaque nœud, et suggérer une technique de résolution numérique.

Cours 10

L'itération du gradient conjugué s'écrit

$x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r_0$
for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**

$\alpha_n = \dfrac{r_{n-1}^T r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}}$	step length
$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}$	approximate solution
$r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1}$	residual
$\beta_n = \dfrac{r_n^T r_n}{r_{n-1}^T r_{n-1}}$	
$p_n = r_n + \beta_n p_{n-1}$	search direction

end

Montrez que les itérés successifs forment une base d'un espace de Krylov.

Cours 11

Expliquez la différence entre la décomposition en valeurs singulières réduite (*reduced SVD*), et la décomposition en valeurs singulières complète (*full SVD*).

Cours 12

Montrez que pour une matrice hermitienne, les valeurs singulières sont égales aux valeurs propres en valeur absolue.