Bachelier Ingénieur civil
Mathématiques appliquées

Faculté de Sciences appliquées

Septembre 2019 - Examen de théorie

Nom :	Prénom :	Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer vos nom et prénom. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'**entièreté du questionnaire**, qui compte 12 pages numérotées de 1 à 12, parmi lesquelles trois sont vierges et peuvent vous servir de feuilles de brouillon. Ces trois feuilles ne seront **pas** regardées lors de la correction.*

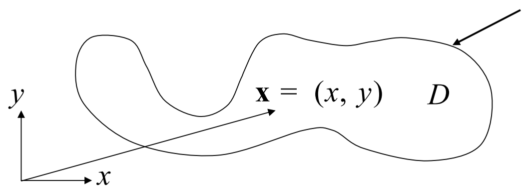
*On vous demande de fournir des réponses très **concises et spécifiques**. Il ne s'agit pas d'être verbeux, mais de prouver, par des réponses courtes qui vont droit au but, que vous avez atteint un niveau élevé de compréhension de la matière. Des réponses qui contiennent des informations périphériques par rapport à ce qui est demandé seront moins bien évaluées que des réponses en parfaite adéquation avec l'objet de la question.*

*Seules les réponses rédigées **à l'intérieur des cadres** prévus à cet effet seront prises en considération.*

Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Question 1 – Equation de Laplace

On considère une fonction *harmonique* $u(x, y)$, dans un domaine bidimensionnel D, dont la frontière est notée Γ, comme l'indique le schéma ci-dessous. Le vecteur position est noté $\mathbf{x}$.



- On demande d'énoncer le *principe du maximum* qui s'applique à la fonction u.

- On suppose temporairement que les dérivées secondes u_{xx} et u_{yy} de la fonction u dans le domaine D ne s'annulent pas. Moyennant cette hypothèse, démontrer le *principe du maximum* de la manière la plus concise possible.

- En relaxant l'hypothèse introduite au point précédent ($u_{xx} \neq 0$ et $u_{yy} \neq 0$ dans $\boldsymbol{D}$), démontrer que le maximum de la fonction u est atteint sur la frontière Γ. Si nécessaire, utiliser les notations introduites dans le schéma de la page précédente. Dans la mesure du possible, structurer clairement votre démonstration en trois étapes.

Etape 1

Etape 2

Etape 3

- La solution de l'équation de Laplace est-elle unique ? Discuter, sans démontrer.

- Etablir un lien entre le *principe du maximum* et l'*unicité* de la solution de l'équation de Laplace dans le cas particulier d'un problème de type Dirichlet.

- Expliquer brièvement (et sans démonstration) la raison mathématique pour laquelle l'équation de Laplace intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes *isotropes* en ingénierie.

Question 2 – Analyse de stabilité (diffusion)

Une approximation par différences finies (différence avant pour la dérivée temporelle, différence centrée pour la dérivée spatiale) de l'équation de diffusion $u_t = \kappa\, u_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = s\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \left(1 - 2s\right)u_j^n$$

avec $u_j^n \approx u\,(j\Delta x,\, n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel.

- Donner la signification de la notation s dans le schéma numérique ci-dessus.

- Quel est l'ordre de précision de ce schéma numérique ? Le schéma est-il *explicite* ou *implicite* ?

- Grâce à une analyse de Von Neumann, étudier la stabilité de ce schéma numérique.

Question 3 – Ondes vs. diffusion

Sur base de cinq critères distincts, comparer les propriétés des solutions d'un problème basé sur l'équation d'onde d'une part et, d'autre part, d'un problème basé sur l'équation de diffusion.

	Ondes	**Diffusion**
Critère 1 :		
Critère 2 :		
Critère 3 :		
Critère 4 :		
Critère 5 :		

Question 4 – Ondes

Sur l'axe réel ($-\infty < x < +\infty$), on considère l'équation d'onde :

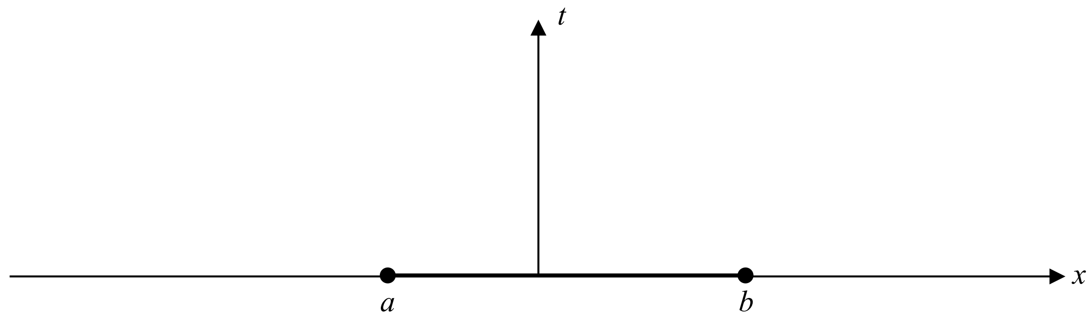
$$u_{tt} = c^2\, u_{xx}$$

munie des conditions initiales suivantes :

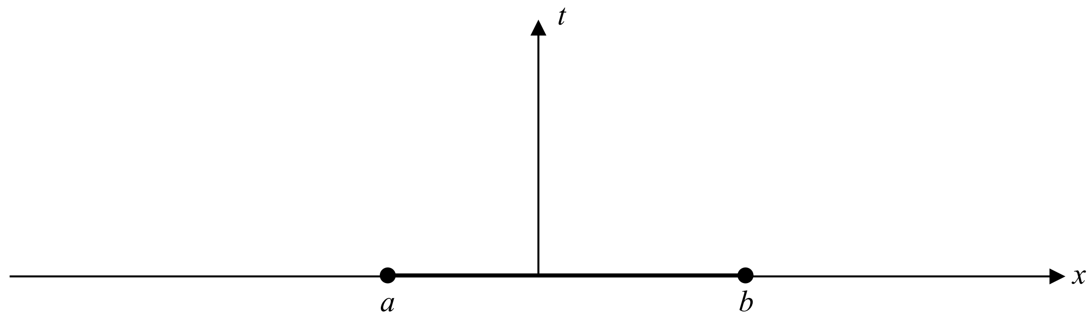
$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{et} \qquad u_t(x, 0) = g(x)$$

avec f et g deux fonctions arbitraires de x, mais suffisamment régulières.

- Sur l'axe $t = 0$, on définit un intervalle $a \leq x \leq b$. On demande de représenter sur le schéma ci-dessous la région de l'espace (x, t) dans laquelle la solution $u(x, t)$ est affectée par les valeurs que prend la fonction f à l'intérieur de l'intervalle $a \leq x \leq b$.



- On demande de représenter sur le schéma ci-dessous la région de l'espace (x, t) dans laquelle la solution $u(x, t)$ est affectée par les valeurs que prend la fonction g à l'intérieur de l'intervalle $a \leq x \leq b$.



- Comment appelle-t-on l'union des deux régions de l'espace que vous avez représentées sur les schémas ci-dessus ?

Question 5 - SVD

Soit la relation $b = A\ x$, avec A une matrice quelconque, et b et x des vecteurs. Montrer que la SVD permet de diagonaliser toute matrice A pour autant qu'on exprime b et x dans la base des vecteurs singuliers de A, respectivement à gauche et à droite.