Applied Mathematics - MATH-0504
Exam statements and solutions

September 3, 2019

Question I (10 Points)

Considérer

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (7 Points) Calculer une décomposition en valeurs singulières de A, telle que $A = U\Sigma V^T$. Donner les matrices U, Σ et V.

(b) (3 Points) Interpréter et représenter la solution :
- Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs singuliers à droite v_1, v_2, ainsi que le cercle unité.
- Esquisser dans l'espace image les vecteurs singuliers à gauche pondérés $\sigma_1 u_1$ et $\sigma_2 u_2$, *i.e.*, l'image par A des vecteurs singuliers à droite.
- Décrire la forme géométrique de l'image par A du cercle unité.

Solution

(a)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

thus $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$ and

$$v_1 = \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ and } v_2 = \pm \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

then

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

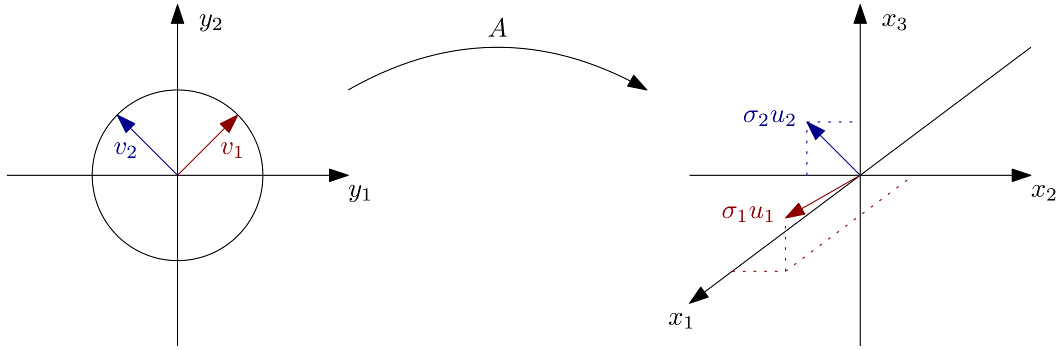
and

$$u_3^T u_1 = u_3^T u_2 = 0 \Rightarrow u_3 = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

such that a singular value decomposition is

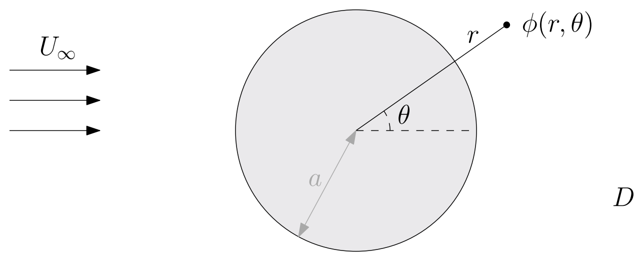
$$U = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(b) The representation is given below. The image of the unit circle is an ellipse.



Question II (10 Points)

Dans un espace à deux dimensions, on considère l'écoulement d'un fluide homogène à l'exérieur d'un disque (imperméable) de rayon a. On introduit des coordonnées polaires (r, θ) avec origine au centre du disque. La domaine de l'écoulement est $D = \{(r,\ \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq a,\ \theta \in [0, 2\pi[\}$. On exprime la vitesse du fluide comme $\boldsymbol{u}(r, \theta) = u(r, \theta)\hat{\boldsymbol{r}} + v(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Voir figure ci-dessous.



On recherche le champ de vitesse autour du disque lorsqu'un écoulement uniforme U_∞ est imposé à l'infini. Si l'écoulement est irrotationnel, on peut introduire un *potentiel de vitesse* $\phi = \phi(r, \theta)$ tel que

$$u = \phi_r \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{r}\phi_\theta.$$

Si l'écoulement est, en plus, incompressible, le potentiel satisfait l'équation de Laplace

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r}\phi_r + \frac{1}{r^2}\phi_{\theta\theta} = 0, \quad \forall (r, \theta) \in D. \tag{†}$$

Suivre les étapes successives ci-dessous pour résoudre ce problème **en justifiant** les développements.

(a) Utiliser la séparation de variables $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ pour obtenir la solution générale de l'Eq. (†) :
- (1 Point) Séparer les variables dans l'Eq. (†) pour obtenir deux équations différentielles ordinaires.
- (2 Points) Résoudre l'équation pour la partie azimutale Θ.
- (3 Points) Résoudre l'équation pour la partie radiale R.
- (1 Point) Montrer (et justifier) que la solution générale de l'Eq. (†) peut s'écrire

$$\phi(r, \theta) = A + B \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n r^n + F_n r^{-n}) \sin n\theta,$$

avec A, B, C_n, D_n, E_n et F_n ($n \in \mathbb{N}_0$) des constantes réelles.

(b) (2 Points) Les conditions d'imperméabilité du cylindre et d'écoulement uniforme à l'infini prennent la forme de conditions de Neumann sur ϕ et s'écrivent respectivement

$$u(a, \theta) = 0, \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi[,$$
$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta) = U_\infty \cos\theta, \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi[.$$

Déterminer les solutions de l'Eq. (†) qui satisfont ces deux conditions aux limites et donner l'expression du champ de vitesse correspondant. Enfin, vérifier que la composante azimuthale de la vitesse satisfait également la condition d'écoulement uniforme à l'infini, c'est-à-dire,

$$\lim_{r\to\infty} v(r, \theta) = -U_\infty \sin\theta, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi[.$$

(c) (1 Point) Déterminer le(s) point(s) de D où l'amplitude de la vitesse est minimale ainsi que le(s) point(s) de D où l'amplitude de la vitesse est maximale. Déterminer ces vitesses minimale et maximale.

Solution :

(a)

- Introducing the separation of variables $\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ in the Laplace equation yields, after multiplication by r^2 (which is valid because $r \neq 0$)

$$r^2 R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = 0, \tag{6}$$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda, \tag{7}$$

where a separation constant $\lambda \in \mathbb{R}$ is introduced because both sides of the equation depend on different variables, and thus must be constant. The separated Laplace equation takes the form of two ordinary differential equations :

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, \tag{8}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{9}$$

- The form of the solutions to the azimuthal equation depends on the sign of λ. If $\lambda = n^2 > 0$, $n \in \mathbb{R}^+$,

$$\Theta(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta, \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Because the solution must be periodic with period 2π, the separation constant λ must be a squared integer, i.e., $n \in \mathbb{N}_0$. If $\lambda = 0$,

$$\Theta(\theta) = C + D\theta, \quad C, D \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Because of the periodic condition, $D = 0$ and only a constant function of θ is a solution. Finally, if $\lambda = -m^2 < 0$, $m \in \mathbb{R}^+$,

$$\Theta(\theta) = E\cosh m\theta + F\sinh m\theta, \quad E, F \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

The periodic condition cannot be met with these functions ($E = F = 0$). Therefore, no non-trivial solution exists if $\lambda < 0$.

- If $\lambda = 0$, the radial equation writes

$$r^2 R'' + rR' = 0, \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \quad R'' = -\frac{R'}{r}, \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \quad R' = \frac{K}{r}, \quad K \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \quad R(r) = K\ln r + L, \quad K, L \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

If $\lambda > 0$, the azimuthal equation has already forced λ to be a squared integer n^2. This yields

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0. \tag{17}$$

The Ansatz $R(r) = r^\alpha$ satisfies the equation for all r provided that

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0, \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 = n^2, \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \pm n. \tag{20}$$

Therefore, the solution is $R(r) = Pr^n + Qr^{-n}$.

- The general solution is the sum of the separated solutions for all the admissible values of λ. All combinations of the separated solutions yield (after renaming the constants)

$$\phi(r,\theta) = A + B\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n r^n + F_n r^{-n})\sin n\theta. \tag{21}$$

(b) The radial velocity is

$$u(r,\theta) = \frac{B}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n(C_n r^{n-1} - D_n r^{-n-1})\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} n(E_n r^{n-1} - F_n r^{-n-1})\sin n\theta, \tag{22}$$

which is finite at infinity only if $C_n = E_n = 0, \forall n \geq 2$ and meets the uniform flow condition if $C_1 = U_\infty$ and $E_1 = 0$. With these conditions, u simplifies to

$$u(r,\theta) = \frac{B}{r} + U_\infty \cos\theta - \sum_{n=1}^{\infty} n(D_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) r^{-n-1}. \tag{23}$$

The impermeability condition writes

$$u(a,\theta) = \frac{B}{a} + U_\infty \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} n(D_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) a^{-n-1} = 0, \quad \forall\theta \in [0, 2\pi[, \tag{24}$$

which is met if $B = 0$, $D_1 = a^2 U_\infty$, $D_n = 0, \forall n \geq 2$ and $F_n = 0, \forall n \geq 1$. Therefore, the velocity potential writes

$$\phi(r,\theta) = A + U_\infty \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \forall A \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

The constant A remains because there is no condition on the values of ϕ. The constant A does not influence the velocity field, given by

$$\boldsymbol{u}(r,\theta) = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{26}$$

Yes, the condition on the azimuthal velocity is satisfied.

(c) (Details skipped here) All points at $r = a$. Minimum amplitude is zero at $\theta = 0$ and $\theta = \pi$. Maximum amplitude is $2U_\infty$ at $\theta = \pi/2$ and $\theta = 3\pi/2$.

Question III (10 Points)

Considérer l'équation suivante

$$u_{tt} + au_t + bu - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{pour} \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[\tag{‡}$$

avec les constantes $a, b \geq 0$ et $c > 0$, et les conditions initiales suivantes, en $t = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$u(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right) \quad \text{et} \quad u_t(x,0) = 0$$

avec $d > 0$ une constante.
Étudier ce problème en répondant aux questions ci-dessous, et en **justifiant** les développements.

(a) (3.5 points) Déterminer la solution de

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

avec les conditions initiales suivantes, en $t = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$v(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right) \quad \text{et} \quad v_t(x,0) = \frac{a}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right).$$

Dans le cas particulier $\frac{ad}{c} \to 0$, montrer que la solution est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{d^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{d^2}\right)\right].$$

Rappel : La fonction d'erreur et sa dérivée sont données par

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{d}\right) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{d}} \exp\left(-z^2\right)\, dz \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{2}{d\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right).$$

(b) (2.5 points) Dans le cadre de l'Eq.(‡), l'énergie potentielle $\mathbb{P}$ et l'énergie cinétique $\mathbb{K}$ sont définies par

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} bu^2\, dx \quad \text{et} \quad \mathbb{K} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2\, dx.$$

Montrer que l'énergie totale $\mathbb{E} = \mathbb{K} + \mathbb{P}$ diminue au cours du temps si u vérifie l'Eq.(‡) avec $a > 0$, *i.e.*, montrer que dans ce cas, $\mathbb{E}_t < 0$. En se basant sur ce résultat, donner une interprétation physique à la constante a.
Indice : L'intégration par parties suivante peut être utile :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} c^2 u_x u_{xt}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} c^2 u_{xx} u_t\, dx + [u_x u_t]_{\mathbb{R}} = -\int_{\mathbb{R}} c^2 u_{xx} u_t\, dx.$$

(c) (3 points) Utiliser une substitution du type $u(x,t) = w(t)v(x,t)$ pour obtenir la solution non-dispersive de l'Eq.(‡) :

- Montrer qu'avec cette substitution, l'Eq.(‡) peut s'écrire

$$wv_{tt} + [2\dot{w} + aw]\, v_t + [\ddot{w} + a\dot{w} + bw]\, v - wc^2 v_{xx} = 0.$$

- Résoudre
$$2\dot{w}_0 + a w_0 = 0 \quad \text{avec} \quad w_0(0) = 1. \tag{$\diamond$}$$
- Donner la condition entre a et b, pour que l'égalité
$$\ddot{w}_0 + a\dot{w}_0 + b w_0 = 0$$
soit vérifiée pour la solution w_0 de l'Eq. $\diamond$. Cette condition est appelée condition de non-dispersion.
- Donner la solution non-dispersive de l'Eq.($\ddagger$) en utilisant la substitution $u(x,t) = w_0(t)v(x,t)$, en supposant la condition de non-dispersion entre a et b vérifiée, et, enfin, en utilisant la solution de la sous-question (a).

(d) (1 point) Dans le cadre de l'*équation des télégraphistes*, les constantes a, b et c sont données par
$$a = \frac{LG + RC}{LC}, \quad b = \frac{RG}{LC} \quad \text{et} \quad c^2 = \frac{1}{LC}$$
où R, G, L, C sont respectivement la résistance, la conductance, l'inductance et la capacité par unité de longueur de la ligne.
Montrer que la condition de non-dispersivité est vérifiée exactement si les constantes de temps RC et LG sont égales.

Solution :

(a) The general solution of $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ is
$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct). \tag{27}$$
The initial conditions allow to determine the functions f and g. Indeed
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) & = \exp -\dfrac{x^2}{d^2} \\ u_t(x,0) = cf'(x) - cg'(x) & = \dfrac{a}{2}\exp -\dfrac{x^2}{d^2} \end{cases} \tag{28}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = \exp -\dfrac{x^2}{d^2} \\ f'(x) - g'(x) = \dfrac{a}{2c}\exp -\dfrac{x^2}{d^2} = \dfrac{a}{2c}\dfrac{d\sqrt{\pi}}{2}\left[\dfrac{2}{d\sqrt{\pi}}\exp -\dfrac{x^2}{d^2}\right] = \dfrac{a}{2c}\dfrac{d\sqrt{\pi}}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{d}\right)\right]' \end{cases} \tag{29}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\left[\exp -\dfrac{x^2}{d^2} + \dfrac{a}{2c}\dfrac{\sqrt{\pi}d}{2}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{d}\right)\right] + C \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\left[\exp -\dfrac{x^2}{d^2} - \dfrac{a}{2c}\dfrac{\sqrt{\pi}d}{2}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{d}\right)\right] - C \end{cases} \tag{30}$$
with an arbitrary constant $C \in \mathbb{R}$, and thus
$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\exp -\frac{(x+ct)^2}{d^2} + \exp -\frac{(x-ct)^2}{d^2}\right] \\ + \frac{1}{2}\frac{a}{2c}\frac{\sqrt{\pi}d}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{(x+ct)}{d}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(x-ct)}{d}\right)\right]. \end{aligned} \tag{31}$$
In the particular case $\frac{ad}{c} \to 0$, it is immediate that the solution tends to the one given.

(b) By definition, this derivative is given by

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \frac{d\mathbb{K}}{dt} + \frac{d\mathbb{P}}{dt} \tag{32}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt}\,dx + \int_{\mathbb{R}} buu_t\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\,dx. \tag{33}$$

Using Eq.(‡) gives

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \int_{\mathbb{R}} u_t c^2 u_{xx}\,dx - \int_{\mathbb{R}} u_t a u_t\,dx - \int_{\mathbb{R}} u_t bu\,dx + \int_{\mathbb{R}} buu_t\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\,dx \tag{34}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} u_t c^2 u_{xx}\,dx - \int_{\mathbb{R}} u_t a u_t\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\,dx. \tag{35}$$

Then using the hint one finds

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\,dx - \int_{\mathbb{R}} a u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2\,dx \tag{36}$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} a u_t^2\,dx < 0. \tag{37}$$

The constant a thus contributes to model a dissipation process.

(c)
- The terms of the original equation after substitution are given by

$$a u_t = a\left[\dot{w}v + w v_t\right] \tag{38}$$
$$u_{tt} = \left[\ddot{w}v + \dot{w}v_t + \dot{w}v_t + w v_{tt}\right] \tag{39}$$
$$bu = b\left[wv\right] \tag{40}$$
$$-c^2 u_t = -c^2\left[w v_{xx}\right] \tag{41}$$

and the sum gives the desired result, *i.e*,

$$u_{tt} + a u_t + bu - c^2 u_{xx} = w v_{tt} + \left[2\dot{w} + aw\right] v_t + \left[\ddot{w} + a\dot{w} + bw\right] v - wc^2 v_{xx} = 0. \tag{42}$$

- By integration and application of the initial condition, we get

$$w_0(t) = \exp\left(-\frac{a}{2}t\right). \tag{43}$$

- By direct substitution of w_0 by its expression (Eq. **??**), we get

$$\ddot{w}_0 + a\dot{w}_0 + bw_0 = 0 \tag{44}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{4}w_0 - \frac{a^2}{2}w_0 + bw_0 = 0 \tag{45}$$
$$\Rightarrow \quad b - \frac{a^2}{4} = 0. \tag{46}$$

The no-dispersion condition is therefore $b = a^2/4$.

- When $w = w_0$ and $b - \frac{a^2}{4} = 0$, Eq.(**??**) simplifies to the simple wave equation

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0. \tag{47}$$

The initial conditions on v are obtained from the initial condition on u, *i.e*

$$\begin{cases} u(x,0) = w(0)v(x,0) & = v(x,0) & = \exp -\dfrac{x^2}{d^2} \\ u_t(x,0) = \dot{w}_0(0)v(x,0) + w_0(0)v_t(x,0) & = -\dfrac{a}{2}v(x,0) + v_t(x,0) & = 0 \end{cases} \tag{48}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(x,0) & = \exp -\dfrac{x^2}{d^2} \\ v_t(x,0) & = \dfrac{a}{2}\exp -\dfrac{x^2}{d^2}. \end{cases} \tag{49}$$

This is actually the problem of sub-question (a) and the solution is thus

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{a}{2}t\right)\left[\left(\exp -\frac{(x+ct)^2}{d^2} + \exp -\frac{(x-ct)^2}{d^2}\right) + \frac{a}{2c}\frac{\sqrt{\pi}d}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{(x+ct)}{d}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(x-ct)}{d}\right)\right)\right]. \tag{50}$$

(d) By definition, we obtain successively

$$4b - a^2 = 4\frac{RG}{LC} - \left(\frac{LG+RC}{LC}\right)^2 \tag{51}$$

$$= \frac{RG}{LC}\left[4 - \left(\frac{LG+RC}{\sqrt{RGLC}}\right)^2\right] \tag{52}$$

$$= \frac{RG}{LC}\left[4 - \left(\sqrt{\frac{LG}{RC}} + \sqrt{\frac{RC}{LG}}\right)^2\right] \tag{53}$$

$$= -\frac{RG}{LC}\left(\sqrt{\frac{LG}{RC}} - \sqrt{\frac{RC}{LG}}\right)^2 = 0 \tag{54}$$

$$\Rightarrow RC = LG. \tag{55}$$