

Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen de théorie

21 août 2023

Nom :

Prénom :

Matricule :

*N'oubliez pas d'indiquer votre **nom** et votre **prénom** sur **chaque** feuille. Veuillez vérifier dès le début de l'examen que vous disposez de l'entièreté du questionnaire, qui compte **12** pages numérotées de 1 à **12**, dont 4 pages de brouillon. Veuillez rendre à la fin de l'examen l'ensemble des **12** pages **dans l'ordre correspondant à leur numérotation**.*

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération.

Remarques :

- Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
 - Essayez **toutes les sous-questions**, beaucoup sont indépendantes.*
 - **Justifiez** vos développements et **expliquez** vos démarches.*
 - Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*
 - L'examen dure **1h30**.*
-

T1 : Définitions (4 Points)

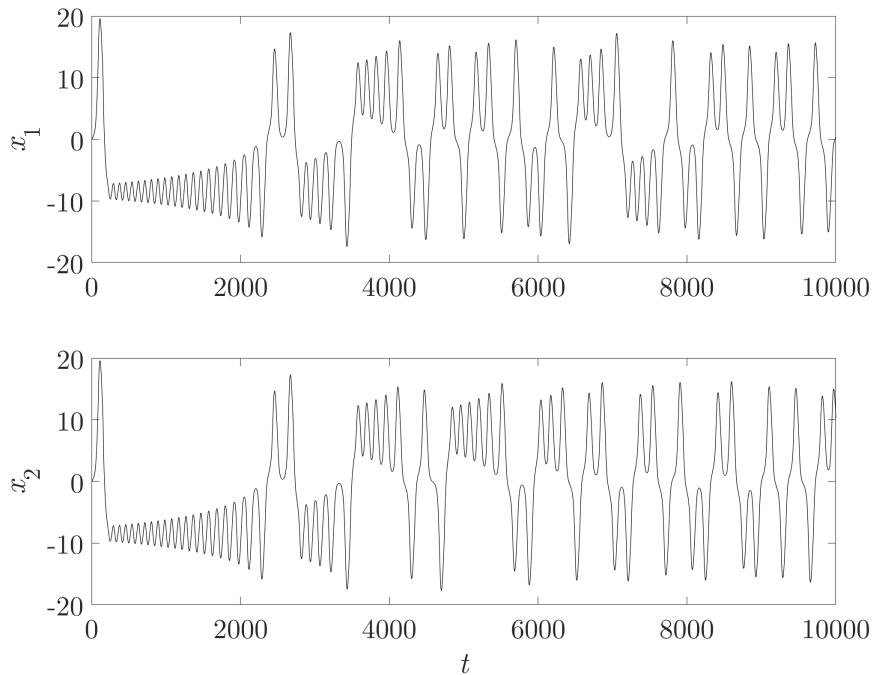
Définir les concepts suivants :

1. une courbe caractéristique d'une équation aux dérivées partielles
2. une solution faible d'une équation aux dérivées partielles
3. une approximation de rang faible d'une matrice
4. une fonction de Green

T2 : Notion de problème bien posé (3 Points)

1. Énoncer les conditions pour qu'un problème soit bien posé.

2. On considère deux variantes d'un même problème. La seule différence entre les deux variantes est une très légère modification de la condition initiale. Le graphique ci-dessous représente l'évolution au cours du temps (t) de la solution de chacune de ces deux variantes du problème (notées x_1 et x_2). S'agit-il d'un problème bien posé? Justifier en une ligne.



T3 : Analyse de Von Neumann (10 Points)

Une approximation par différences finies de l'équation de diffusion $u_t = u_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = (1 - \theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

avec $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel.

1. Ce schéma d'approximation est-il explicite ou implicite ? Justifier.
2. Quel est l'ordre de précision de ce schéma d'approximation ? Expliquer.
3. Grâce à une analyse de Von Neumann, étudier la stabilité de ce schéma numérique.
 - (a) Pour ce faire, il vous est tout d'abord demandé de donner l'expression du facteur d'amplification du schéma, en fonction du paramètre θ , d'un nombre d'onde k , du pas spatial Δx et du paramètre suivant : $s = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Nom :

Prénom :

Nom :

Prénom :

- (b) Ensuite, veuillez discuter les valeurs que peut prendre le facteur d'amplification, et tirer des conclusions concernant la stabilité du schéma. Interpréter.

T4 : SVD (8 Points)

1. Quelle(s) propriété(s) doit avoir une matrice A pour qu'une décomposition en valeurs singulières de cette matrice existe ?

2. La décomposition en valeurs singulières est une factorisation d'une matrice A sous la forme :

$$A = U\Sigma V^*.$$

Quelles sont les propriétés des matrices U , Σ et V ?

3. Soit la relation $b = Ax$, avec A une matrice, et b et x des vecteurs. Dans quelles bases faut-il exprimer x et b si on souhaite diagonaliser A ?

Nom :

Prénom :

4. Les valeurs singulières sont-elles déterminées de manière unique ? Expliquer.

5. Les vecteurs singuliers sont-ils déterminés de manière unique ? Expliquer.

6. Quel lien y a-t-il entre la décomposition en valeurs singulières et le rang d'une matrice ?

7. Quel lien y a-t-il entre la décomposition en valeurs singulières et la norme d'une matrice ?

