Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen d'exercices

21 Août 2023

Seules les réponses rédigées dans les **cadres** seront prises en considération.

Remarques :

- *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
- *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
- ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
- *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdits.*
- *L'examen dure* ***2h****.*

Exercices

E1 : Séparation (10 Points)

On considère l'équation de Laplace anisotropique :

$$au_{xx} + bu_{yy} = 0 \tag{†}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

Suivre les étapes successives ci-dessous pour résoudre ce problème **en justifiant** les développements.

(a) (1 point) Classifier l'équation (†). Justifier brièvement.

(b) (3 points) Utiliser la séparation de variables $u(x, y) = X(x)Y(y)$ pour trouver toutes les solutions séparables de l'Eq. (†).

(c) (4 points) On désire résoudre l'équation sur un domaine rectangulaire de longueur L et de hauteur H (i.e. $\Omega =]0, L[\times]0, H[$) avec les conditions limites suivantes, où $g(y)$ est une fonction supposée connue.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, & \forall x \in]0, L[, \\ u(x,H) &= 0, & \forall x \in]0, L[, \\ u_x(0,y) &= 0, & \forall y \in]0, H[, \\ u_x(L,y) &= g(y), & \forall y \in]0, H[, \end{aligned} \tag{$\diamond$}$$

Déterminer les solutions de l'Eq. (†) qui satisfont les conditions limites *homogènes* de ($\diamond$) et montrer que la solution générale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(p_n y) \cosh(q_n x). \tag{‡}$$

Donner les valeurs des coefficients réels p_n, q_n en fonction de n.

(d) (1 Point) En repartant de l'Eq (‡), déterminer **toutes** les constantes A_n dans le cas où $g(y) = \sin(2\pi \frac{y}{H})$.

(e) (1 Point) On désire maintenant résoudre la même équation mais avec deux conditions limites non-nulles :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, & \forall x \in]0, L[, \\ u(x,H) &= f(x), & \forall x \in]0, L[, \\ u_x(0,y) &= 0, & \forall y \in]0, H[, \\ u_x(L,y) &= g(y), & \forall y \in]0, H[. \end{aligned} \tag{$\blacksquare$}$$

Sans faire de calculs, expliquer comment procéder pour résoudre ce problème.

Solution

(a) L'équation est linéaire, homogène, elliptique et d'ordre 2 en espace.

(b) En introduisant l'ansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ dans l'équation, on obtient :

$$aX''Y + bXY'' = 0. \tag{1}$$

Divisant par bu (simplement divisier par u ou par u est également correct) puis en faisant passer l'expression en y à droite, l'équation devient

$$\frac{a}{b}\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}. \tag{2}$$

Les deux membres de l'égalité dépendent de variables différentes et sont donc constants. On note $\lambda = \frac{a}{b}\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$.

On résout désormais les deux ODEs. On observe que pour chacune d'elle, la solution dépend du signe de λ.

TABLE 1 – Solutions séparables selon λ

	X	Y
$\lambda = k^2 > 0$	$A\cosh\sqrt{k\frac{b}{a}}x + B\sinh k\sqrt{\frac{b}{a}}x$	$G\cos ky + H\sin ky$
$\lambda = 0$	$C + Dx$	$I + Jy$
$\lambda = -k^2 < 0$	$E\cos\sqrt{k\frac{b}{a}}x + F\sin k\sqrt{\frac{b}{a}}x$	$K\cosh ky + L\sinh ky$

(c) On applique les trois conditions homogènes à notre disposition.
De la troisième condition, $u_x(0, y) = 0$, on déduit $X'(x) = 0$ (après division par Y).
Selon la valeurs de λ, on déduit respectivement $B = 0$, $D = 0$ ou $F = 0$. La partie en x d'une solution est donc soit un cosinus, soit une constante, soit un cosinus hyperbolique.

On s'attaque ensuite à la partie en y. La condition homogène en 0 impose respectivement $G = 0$, $I = 0$, $K = 0$. On impose ensuite $Y(H) = 0$. Il vient respectivement :

— $H\sin kH = 0$, soit $k = \frac{n\pi}{H}$ pour $n = 1, 2, 3..$

— $JH = 0$, ce qui implique $J = 0$ et mène à une solution triviale (nulle identiquement).

— $L\sinh kH = 0$, qui n'est possible que si L est nul, ce qui mène aussi à une solution triviale.

En conclusion, il n'existe de solution compatible avec les conditions limites homogènes que si $\lambda > 0$ pour des valeurs discrètes de λ. Pour tout naturel n, il existe une solution pour $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{H^2}$, et elle est de la forme (à un coefficient près vu que l'équation et les conditions appliquées sont homogènes) :

$$u_n(x, y) = \sin n\pi\frac{y}{H}\cosh\sqrt{\frac{b}{a}}n\pi\frac{x}{H}. \tag{3}$$

La solution générale du problème avec les conditions homogènes appliquées est une combinaison linéaire de ces solutions, et est donc de la forme

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin n\pi\frac{y}{H}\cosh\sqrt{\frac{b}{a}}n\pi\frac{x}{H}, \tag{4}$$

ce qui correspond à l'énoncé (‡) avec $p_n = n\frac{\pi}{H}$ et $q_n = n\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{\pi}{H}$.

(d) On cherche désormais parmi la famille de solution de type (‡) celle qui correspond à la condition inhomogène donnée. En admettant que la série peut être dérivée terme à terme, on calcule $u_x(L,y)$:

$$u_x L, y = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n q_n \sin n\pi \frac{y}{H} \sinh \sqrt{\frac{b}{a}} n\pi \frac{x}{H} = \sin 2\pi \frac{y}{H}. \tag{5}$$

Par identification (les $\sin n\pi \frac{y}{H}$ sont linéairement indépendants) on observe immédiatement que si tous les coefficients sont nuls sauf A_2, qui est tel que

$$A_2 q_2 \sinh \sqrt{\frac{b}{a}} n\pi \frac{x}{H} = 1, \tag{6}$$

on obtient la solution au problème complet.

(e) Par linéarité, il suffit d'additionner une solution pour chacune des deux conditions inhomogènes. On a déjà calculé la solution dans le cas $f = 0$. Il suffit d'y ajouter une solution au problème

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, && \forall x \in]0,L[, \\ u(x,H) &= f(x), && \forall x \in]0,L[, \\ u_x(0,y) &= 0, && \forall y \in]0,H[, \\ u_x(L,y) &= 0, && \forall y \in]0,H[, \end{aligned} \tag{■}$$

En utilisant une approche similaire à la précédente.

Tenter d'appliquer les deux conditions simultanément ne fonctionne pas : l'ensemble de solutions avec les deux conditions homogènes est trop vaste. Il faut donc découper le problème en deux sous-problèmes.

E2 : Solution de Green (10 Points)

Considérer l'équation de Schrödinger en espace libre

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m_0}u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[\tag{$\square$}$$

où $\hbar$ et m_0 sont des constantes réelles strictement positives (respectivement la constante de Planck réduite et la masse) et $i^2 = -1$ est le nombre imaginaire pur.
Considérer aussi la condition initiale

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+a) + \phi(x-a)\right] \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}d}\exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right) \tag{$\dagger$}$$

où d et a sont des constantes réelles strictement positives. En suivant les étapes successives ci-dessous, résoudre l'Éq.($\square$) avec la condition initiale Éq.($\dagger$).

(a) (2 Points) Montrer que l'Éq.($\square$) peut s'écrire sous la forme

$$u_t - \tilde{k}u_{xx} = 0. \tag{$\blacksquare$}$$

Donner l'expression de $\tilde{k}$ en fonction de $\hbar$ et m_0. Quelle est la différence principale avec l'équation de diffusion classique $(u_t - ku_{xx})$?

(b) (5 Points) Résoudre l'Éq.($\blacksquare$) avec la condition initiale

$$u(x,0) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}d}\exp\left(-\frac{x^2}{d^2}\right).$$

Exprimer la solution en fonction de $\sigma(t) \triangleq \sqrt{d^2 + 4\tilde{k}t}$.
Rappel : La fonction de Green associée à l'équation Éq.($\blacksquare$) est

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tilde{k}t}\right)$$

Indice : L'identité suivante peut s'avérer utile

$$\frac{(x-y)^2}{4\tilde{k}t} + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = \alpha\left(y-\gamma\right)^2 + \beta$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{4\tilde{k}t}\left(\frac{\sigma(t)}{d}\right)^2, \quad \gamma = \left(\frac{d}{\sigma(t)}\right)^2 x \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{x}{\sigma(t)}\right)^2.$$

Indice : L'intégrale de Poisson

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\eta^2\right) d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

peut s'avérer utile.

(c) (3 Points) En utilisant les résultats des deux sous-questions précédentes, donner, en justifiant votre démarche, la solution de l'Éq.($\square$) avec la condition initiale Éq.($\dagger$). Exprimer la solution en fonction de a, σ et $\tilde{k}$.
Indice : Décomposer la solution et la condition initiale en deux, *i.e.* $u_\pm \leftrightarrow \phi(x \pm a)$. Utiliser ensuite le changement de variable $x' = x \pm a$ afin de pouvoir utiliser le résultat de la sous-question (b). Justifier la validité de cette décomposition.

Solution :

(a) De manière immédiate

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m_0}u_{xx} \tag{7}$$
$$i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m_0}u_{xx} = 0 \tag{8}$$
$$u_t + \frac{\hbar}{i2m_0}u_{xx} = 0 \tag{9}$$
$$u_t - \frac{i\hbar}{2m_0}u_{xx} = 0 \tag{10}$$

et $\tilde{k} \triangleq \frac{i\hbar}{2m_0}$ est donc un nombre complexe pur, $\tilde{k} \in i\mathbb{R}^+$.

(b) En utilisant le principe de superposition, la solution générale de l'Éq.(■) est

$$u_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{x-y}{\sqrt{4\tilde{k}t}}\right]^2\right)\phi(y)\mathrm{d}y, \tag{11}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}}\frac{1}{\sqrt{\pi}d}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{x-y}{\sqrt{4\tilde{k}t}}\right]^2\right)\exp\left(-\left[\frac{y}{d}\right]^2\right)\mathrm{d}y, \tag{12}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}}\frac{1}{\sqrt{\pi}d}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\left[y-\gamma\right]^2-\beta\right)\mathrm{d}y, \tag{13}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}}\frac{1}{\sqrt{\pi}d}\exp\left(-\beta\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\eta^2\right)\mathrm{d}\eta, \tag{14}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{k}t}}\frac{1}{\sqrt{\pi}d}\exp\left(-\beta\right)\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{15}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)}\exp\left(-\left[\frac{x}{\sigma(t)}\right]^2\right). \tag{16}$$

(c) Appelons $u_\pm$ les solutions des problèmes

$$(\partial_t - \tilde{k}\partial_{xx})u_\pm = 0 \quad \text{avec} \quad u_\pm(x,0) = \phi(x \pm a). \tag{17}$$

Par linéarité, il apparaît que $u(x,t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_-)$ est la solution de l'Éq.(□) avec la condition initiale Éq.(†). En utilisant le changement de variable $x'_\pm = x \pm a$, ces sous-problèmes se réduisent à

$$(\partial_t - \tilde{k}\partial_{x'x'})u_\pm = 0 \quad \text{avec} \quad u_\pm(x',0) = \phi(x') \tag{18}$$

dont la solution a été calculée à la sous-question (b). La solution finale est donc

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_+ + u_-) \tag{19}$$
$$= \frac{1}{2}(u_0(x'_+,t) + u_0(x'_-,t)) \tag{20}$$
$$= \frac{1}{2}(u_0(x+a,t) + u_0(x-a,t)) \tag{21}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma(t)}\left[\exp\left(-\left[\frac{x+a}{\sigma(t)}\right]^2\right) + \exp\left(-\left[\frac{x-a}{\sigma(t)}\right]^2\right)\right] \tag{22}$$

E3 : Caractéristiques (10 Points)

Considérer l'équation

$$Au_t + tu_x + Au = 0,$$

définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, avec A une fonction quelconque, et assortie de la condition initiale $u(x, 0) = x/2$.
Répondre aux questions suivantes :

(a) (2 Points) Appliquer la méthode des caractéristiques pour transformer l'équation aux dérivées partielles donnée en deux équations différentielles ordinaires. Justifier.

(b) (4 Points) Pour $A = 1/x$. :
— classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
— calculer l'équation des caractéristiques $x(t)$ et la solution de ce problème,
— equisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -1, 0, 1$.

(c) (4 Points) Pour $A = 1/u$:
— classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
— calculer l'équation des caractéristiques $x(t)$ et la solution de ce problème.

Solution :

(a) A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{23}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente en deux équations différentielles ordinaires. La première est donnée par l'expression ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = -u, \tag{24}$$

1 en considérant les dérivées partielles u_x et u_t définies sur les lignes $x(t)$.
Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{A}. \tag{25}$$

(b) EDP linéaire, homogène, d'ordre 1.
Dès lors, la solution devient

$$\frac{du}{dt} = u, \tag{26}$$
$$\Rightarrow \quad \ln|u| = -t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \tag{27}$$
$$\Rightarrow \quad |u| = K\exp(-t), \quad K \in \mathbb{R}_0^+, \tag{28}$$
$$\Rightarrow \quad u(x(t),t) = \pm K\exp(-t), \tag{29}$$
$$\Rightarrow \quad u(x(t),t) = K_1\exp(-t), \quad K_1 \in \mathbb{R}_0. \tag{30}$$

En résolvant l'Éq.(25), les lignes caractéristiques sont données par l'équation

$$\frac{dx}{dt} = t/x, \tag{31}$$
$$\Rightarrow \quad x(t) = C_2\exp(t^2/2), \quad C_2 \in \mathbb{R} \tag{32}$$
$$\tag{33}$$

La constante C_2 est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $x = 0$,

$$x(0) = x_0 = C_2, \tag{34}$$
$$\Rightarrow \quad C_2 = x_0 \tag{35}$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = x_0\exp(t^2/2), \tag{36}$$
$$\Rightarrow \quad x_0 = x\exp(-t^2/2), \tag{37}$$
$$\tag{38}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la constante K_1

$$u(x(0),0) = K_1\exp(0) = x_0/2, \tag{39}$$
$$\Rightarrow \quad K_1 = x_0/2. \tag{40}$$

Finalement, la solution est

$$u(x,y) = \frac{x}{2}\exp(-t^2/2)\exp(-t), \tag{41}$$
$$= \frac{x}{2}\exp\left(\frac{-t^2}{2} - t\right). \tag{42}$$

(c) EDP non linéaire, homogène, d'ordre 1.
De façon équivalente, on obtient en remplaçant l'expression de u dans l'Éq.(25)

$$\frac{dx}{dt} = Kt\exp(-t), \tag{43}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = -K(t+1)\exp(-t) + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R} \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

et la solution

$$u(x,t) = \frac{x}{3\exp(t) - (t+1)}. \tag{46}$$