Théorie

T1 : Définitions (4 Points)

Définir les concepts suivants :

— une courbe caractéristique d'une équation aux dérivées partielles ;
— une solution faible d'une équation aux dérivées partielles ;
— un problème bien posé ;
— une approximation de rang faible d'une matrice A.

Nom : Prénom :

T2 : Classification des équations aux dérivées partielles (4 Points)

Pour chacune des deux équations ci-dessous, répondre aux questions suivantes et **justifier** brièvement :

- Quel est l'ordre de l'équation ?
- S'agit d'une équation linéaire, quasi-linéaire ou non linéaire ?
- L'équation est-elle homogène ou non homogène ?
- L'équation est-elle parabolique, elliptique, hyperbolique, ou d'un autre type ?

Notations u désigne la fonction inconnue, tandis que x et y sont des variables indépendantes.

1. $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$

2. $\sqrt{1+x^2}\,(\cos y)\,u_x + u_y = \sin u$

T3 : Equation de Laplace (4 Points)

Si u est une fonction harmonique dans un domaine bidimensionel Ω, de frontière Γ, on vous demande

1. d'énoncer le principe du maximum qui s'applique à la function u ;
2. d'établir un lien entre le principe du maximum et l'unicité de la solution de l'équation de Laplace dans le cas particulier d'un problème de type Dirichlet.

T4 : Approximation de l'équation de diffusion (6 Points)

Une approximation par différences finies (différence avant pour la dérivée temporelle, différence centrée pour la dérivée spatiale) de l'équation de diffusion $u_t = ku_{xx}$ mène au schéma numérique suivant :

$$u_j^{n+1} = s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2s)u_j^n$$

avec $u_j^n \approx u(j\Delta x, n\Delta t)$, Δx le pas spatial et Δt le pas temporel.

1. Quel est l'ordre de précision de ce schéma d'approximation ?
2. Grâce à une analyse de Von Neumann, étudier la stabilité de ce schéma numérique.

Nom : Prénom :

T5 : Caractéristiques (4 Points)

Sur l'axe réel ($-\infty < x < \infty$), on considère l'équation d'onde :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

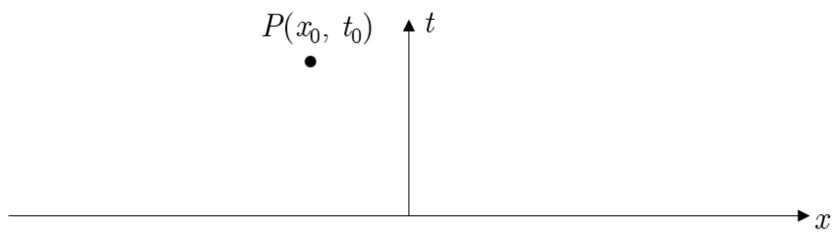
munie des conditions initiales suivantes :

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{et} \qquad u_t(x, 0) = g(x)$$

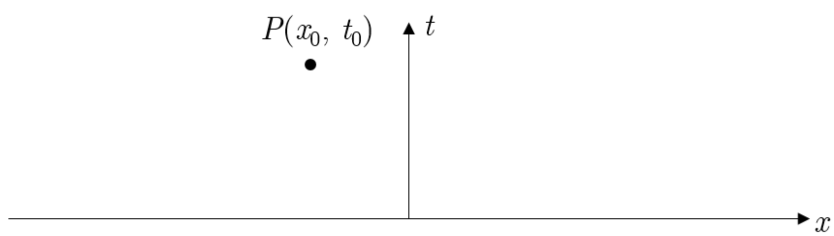
avec f et g deux fonctions arbitraires de x, mais suffisamment régulières.

Sur les schémas ci-dessous, représenter

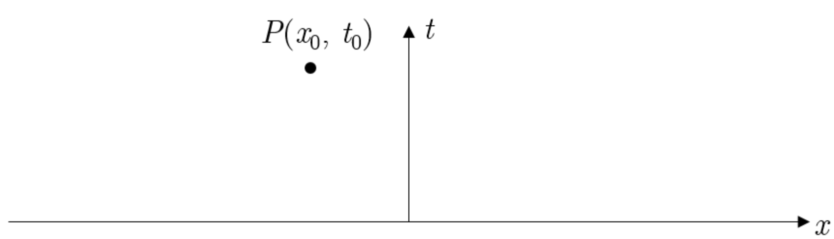
1. le domaine de dépendance d'un point P quelconque de coordonnées données (x_0, t_0) ;



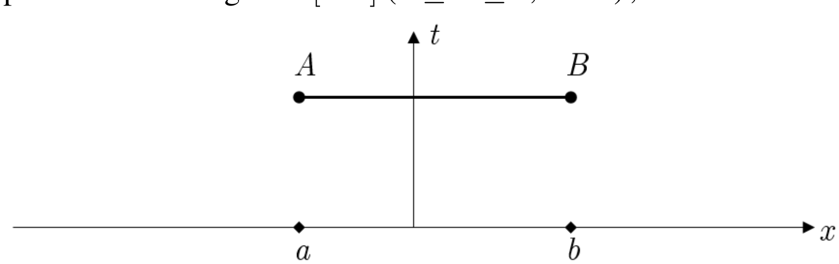
2. l'ensemble des points de l'axe $t = 0$ où les valeurs prises par la fonction $f(x)$ influencent la solution $u(x_0, t_0)$ au point P ;



3. l'ensemble des points de l'axe $t = 0$ où les valeurs prises par la fonction $g(x)$ influencent la solution $u(x_0, t_0)$ au point P ;



4. le domaine de dépendance d'un segment $[AB]$ ($a \leq x \leq b$, $t > 0$) ;



T6 : Méthodes de sous-espaces (4 Points)

L'itération du gradient conjugué pour le système linéaire $Ax = b$ s'écrit comme suit :

$x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r_0$
for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**

$$\alpha_n = \frac{r_{n-1}^T r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}} \quad \text{longueur du pas}$$
$$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1} \quad \text{solution approchée}$$
$$r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1} \quad \text{résidu}$$
$$\beta_n = \frac{r_n^T r_n}{r_{n-1}^T r_{n-1}}$$
$$p_n = r_n + \beta_n p_{n-1} \quad \text{direction de recherche}$$

end

On vous demande de montrer que la solution approchée x_n à l'itération n appartient à l'espace engendré par les résidus $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$, i.e. que $x_n \in \langle r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \rangle$.

T7 : SVD (4 Points)

Soit la relation $b = Ax$, avec A une matrice quelconque, et b et x des vecteurs. Montrer que la SVD permet de diagonaliser toute matrice A pour autant qu'on exprime b et x dans la base des vecteurs singuliers de A, respectivement à gauche et à droite.