Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen

21 Août 2021

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération. Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Remarques :

— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez **toutes les sous-questions**, beaucoup sont indépendantes.*
— *Pour les **questions de théorie** : fournissez des réponses **concises et spécifiques**. On vous demande de prouver que vous avez atteint un niveau élevé de compréhension de la matière. Des réponses qui contiennent des informations périphériques par rapport à ce qui est demandé seront moins bien évaluées que des réponses en parfaite adéquation avec l'objet de la question.*
— *Pour les **exercices** : **justifiez** vos développements et **expliquez** vos démarches.*
— *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*

E1 : Séparation de variables (10 Points)

Considérer l'équation d'Euler-Bernouilli

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad (\diamond)$$

où a est une constante strictement positive.

(a) (20 %) Classifier l'équation ($\diamond$) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? Quel est l'ordre de cette équation ?

(b) (30 %) En utilisant la séparation de variable $u(x,t) = w(t)v(x)$, trouver toutes les solutions séparables de l'équation ($\diamond$).
Remarque : Ne pas étudier les solutions exponentiellement croissantes ou décroissantes dans le temps.

(c) (40 %) Considérer maintenant le domaine $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty[$ et les conditions de bord

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0.$$

Montrer, en justifiant votre démarche, que la solution générale de l'équation ($\diamond$) sur ce domaine avec ces conditions de bord peut s'écrire sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x).$$

Donner l'expression de ω_n et k_n en fonction de n, a et l.
Indice : Imposer d'abord les conditions de bord en $x = 0$, puis celles en $x = l$.

(d) (10 %) La vitesse du n-ième mode est définie par $c_n \triangleq \frac{\omega_n}{k_n}$. Donner l'expression de ces vitesses. Les modes se déplacent-ils à la même vitesse ?

Solution :

(a) L'opérateur différentiel associé à cette équation est $\mathcal{L} \triangleq \partial_{tt} + a^4\partial_{xxxx}$. L'équation est donc
- homogène ($\mathcal{L}(u) = 0$),
- linéaire ($\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$),
- du quatrième ordre spatial (∂_{xxxx}) et du second ordre temporel (∂_{tt})

(b) En utilisant la décomposition $u = wv$, l'équation s'écrit

$$w''v + a^2wv^{(4)} = 0 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \frac{w''}{w} + a^2\frac{v^{(4)}}{v} = 0. \tag{2}$$

Le premier terme ne dépend que du temps t alors que le deuxième terme ne dépend que de la variable spatiale x. Chacun de ces deux termes doit donc être égal à la même constante λ, *i.e*

$$w'' + \lambda w = 0 \quad \text{and} \quad a^2v^{(4)} - \lambda v = 0. \tag{3}$$

Dépendance temporelle En fonction du signe de λ, trois types de solutions apparaissent, *i.e*

$$\text{si } \lambda = \omega^2 > 0 \qquad \Rightarrow w = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \tag{4}$$

$$\text{si } \lambda = -\omega^2 < 0 \qquad \Rightarrow w = C\cosh(\omega t) + D\sinh(\omega t), \tag{5}$$

$$\text{si } \lambda = 0 \qquad \Rightarrow w = Et + F. \tag{6}$$

Les solutions évanescentes correspondent au cas $\lambda = -\omega^2$. Ce cas n'est plus considéré dans la suite de l'exercice.

Dépendance spatiale Deux types de solutions apparaissent. Si $\lambda = 0$ alors la partie spatiale est simplement un polynôme d'ordre 3, *i.e.*

$$v(x) = Gx^3 + Hx^2 + Ix + J \quad \text{si} \quad \lambda = 0.$$

Lorsque $\lambda = \omega^2$, les quatre racines du polynôme caractéristiques sont $\pm\sqrt{\omega/a}$ et $\pm i\sqrt{\omega/a}$. En définissant $k \triangleq \sqrt{\omega/a}$, la partie spatiale s'écrit

$$\begin{aligned} v(x) =& K'\exp(ikx) + L'\exp(-ikx) + M'\exp(kx) + N'\exp(-kx) \\ =& K\cos(kx) + L\sin(kx) + M\cosh(kx) + N\sinh(-kx) \quad \text{si} \quad \lambda = \omega^2 > 0. \end{aligned}$$

Les conditions de bord donnent des conditions à appliquer sur la partie spatiale, *i.e.*

$$\begin{cases} u(0,t) &= w(t)v(0) &= 0, \forall t \Rightarrow v(0) &= 0, \\ u(l,t) &= w(t)v(l) &= 0, \forall t \Rightarrow v(l) &= 0, \\ u_{xx}(0,t) &= w(t)v_{xx}(0) &= 0, \forall t \Rightarrow v_{xx}(0) &= 0, \\ u_{xx}(l,t) &= w(t)v_{xx}(l) &= 0, \forall t \Rightarrow v_{xx}(l) &= 0. \end{cases} \tag{7}$$

De manière assez rapide lorsque $\lambda = 0$, on obtient $G = H = I = J = 0$. Lorsque $\lambda > 0$, la dérivée seconde de la partie spatiale est donnée par

$$v_{xx}(x) = -Kk^2\cos kx - Lk^2\sin kx + Mk^2\cosh kx + Nk^2\sinh kx \tag{8}$$

Les conditions de bord en $x = 0$ donnent donc

$$\begin{cases} v(0) &= & K+ & 0+ & M+ & 0 &= 0, \\ v_{xx}(0) &= - & Kk^2+ & 0+ & Mk^2+ & 0 &= 0. \end{cases} \quad \Rightarrow K = M = 0. \tag{9}$$

Alors que les conditions en $x = l$ donnent

$$\begin{cases} v(l) & = & L\sin kl + & N\sinh kl = 0, \\ v_{xx}(l) & = - & Lk^2\sin kl + & Nk^2\sinh kl = 0 \end{cases} \Rightarrow N = 0 \text{ et } L\sin kl = 0. \quad (10)$$

Les seules solutions non nulles sont donc obtenues lorsque

$$\sin(kl) = 0 \quad \Rightarrow \quad kl = n\pi, \text{ avec } n = 1, 2, 3, \ldots \quad (11)$$

Les fonctions propres spatiales sont donc

$$v_n(x) = L_n \sin(k_n x) = L_n \sin(n\pi \frac{x}{l}), \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots \quad (12)$$

Les pulsation temporelles correspondantes sont données par

$$\omega_n = k_n^2 a = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a \quad (13)$$

et les fonctions propres temporelles sont donc

$$w_n(t) = A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t) = A_n\cos(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at) + B_n\sin(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at). \quad (14)$$

Par linéarité, la solution la plus générale est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right] L_n\sin(k_n x) \quad (15)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A'_n\cos(\omega_n t) + B'_n\sin(\omega_n t)\right]\sin(k_n x). \quad (16)$$

avec $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a$ et $k_n = \frac{n\pi}{l}$.

(c) La vitesse du n-ième mode est donc donnée par

$$c_n \triangleq \frac{\omega_n}{k_n} = \frac{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a}{\frac{n\pi}{l}} \quad (17)$$

$$= n\pi\frac{a}{l} \quad (18)$$

Les modes ne se déplacent pas tous à la même vitesse. La vitesse de phase des modes augmente avec n.

E2 : Factorisation (10 Points)

Considérer l'équation

$$u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1c_2u_{xx} = 0 \tag{$\diamond$}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes strictement positives.

(a) (20 %) Classifier l'équation ($\diamond$) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? parabolique ? elliptique ? hyperbolique ? Quel est l'ordre de cette équation ?

(b) (25 %) Montrer que $e \triangleq \frac{1}{2}\left(u_t^2 + c_1c_2u_x^2\right)$ est une densité conservée et donner le flux associé.

(c) (40 %) Considérer maintenant le domaine $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty[$. Résoudre l'équation ($\diamond$) avec les conditions initiales

$$u(x,0) = \phi(x) \quad \text{et } u_t(x,0) = 0.$$

Indice : Factoriser en deux équations du premier degré.

(d) (15 %) En utilisant la solution de la sous question précédente, résoudre le problème

$$-s_1s_2u_{tt} + (s_1 - s_2)u_{xt} + u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty[$$

avec

$$u(x,0) = \phi(x) \quad \text{et } u_t(x,0) = 0$$

où s_1 et s_2 sont des constantes strictement positives.

Indice : Les constantes c_1 et c_2 sont des vitesses. Les constantes s_1 et s_2 sont des lenteurs. L'inverse d'une lenteur est une vitesse. L'inverse d'une vitesse est une lenteur.

Solution :

(a) L'opérateur différentiel associé à cette équation est $\mathcal{L} \triangleq \partial_{tt} + (c_1 - c_2)\partial_{xt} - c_1c_2\partial_{xx}$. L'équation est donc

- homogène ($\mathcal{L}(u) = 0$),
- linéaire ($\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$),
- du second ordre spatial (∂_{xx}) et temporel (∂_{tt}),
- hyperbolique.

En effet, elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} Au_{tt} + B\quad & u_{tx} + C\quad u_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G \qquad (19)\\ 1u_{tt} + (c_1 - c_2) & u_{tx} - c_1c_2u_{xx} + 0\ u_t + 0\ u_x + 0\ u = 0 \qquad (20) \end{aligned}$$

en conséquence

$$B^2 - 4AC = (c_1 - c_2)^2 + 4c_1c_2 = (c_1 + c_2)^2 > 0. \tag{21}$$

(b) La dérivée de la quantité conservée proposée est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + c_1c_2u_x^2\right) && (22)\\ &= u_tu_{tt} + c_1c_2u_xu_{xt} && (23)\\ &= u_t\left(u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1c_2u_{xx}\right) + c_1c_2u_tu_{xx} - (c_1 - c_2)u_tu_{xt} + c_1c_2u_xu_{xt} && (24)\\ &= c_1c_2(u_tu_{xx} + u_xu_{xt}) - (c_1 - c_2)u_tu_{xt} && (25)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(c_1c_2u_xu_t - (c_1 - c_2)\frac{1}{2}u_t^2\right). && (26) \end{aligned}$$

Le flux associé est donc

$$f = -c_1c_2u_xu_t + (c_1 - c_2)\frac{1}{2}u_t^2. \tag{27}$$

(c) La factorisation de l'opérateur différentiel donne

$$(\partial_t + c_1\partial_x)\,(\partial_t - c_2\partial_x)\,u = 0. \tag{28}$$

En posant $v(x,t) = (\partial_t - c_2\partial_x)\,u$, le problème peut s'écrire comme un système du premier ordre

$$\begin{cases} (\partial_t + c_1\partial_x)\,v = 0, & (29)\\ (\partial_t - c_2\partial_x)\,u = v, & (30)\\ u(x,0) = \phi(x), & (31)\\ u_t(x,0) = 0. & (32) \end{cases}$$

À partir de l'Eq.(29), on peut montrer que v est constante sur les lignes caractéristiques d'équations $x - c_1t = C$. Soit

$$v(x,t) = f(x - c_1t). \tag{33}$$

Grâce à ce résultat, l'Eq.(30) peut s'écrire

$$(\partial_t - c_2\partial_x)\,u = f(x - c_1t). \tag{34}$$

Une solution particulière de cette équation est donnée par $u^p(x,t) = h(x - c_1t)$, avec $h'(y) = -\dfrac{1}{c_1 + c_2}f(y)$.
D'autre part, en utilisant le même raisonnement que pour v, il est possible de montrer que la solution homogène est donnée par $u^h(x,t) = g(x + c_2t)$.
Par linéarité, la solution finale est la somme de ces solutions, soit

$$u(x,t) = h(x - c_1t) + g(x + c_2t). \tag{35}$$

En utilisant ensuite les conditions initiales Eq.(31) et Eq.(32), on obtient

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = \phi(x), & (36)\\ -c_1h'(x) + c_2g'(x) = 0. & (37) \end{cases}$$

En dérivant par rapport à x, la première équation, on obtient successivement

$$\begin{cases} h'(x) + g'(x) = \phi'(x),\\ -c_1h'(x) + c_2\, g'(x) = 0. \end{cases} \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (c_1 + c_2)g'(x) = c_1\,\phi'(x),\\ -(c_1 + c_2)h'(x) = -c_2\,\phi'(x). \end{cases} \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}\,\phi'(x),\\ h'(x) = \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}\,\phi'(x). \end{cases} \tag{40}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}\,\phi(x) + A,\\ h(x) = \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}\,\phi(x) + B. \end{cases} \tag{41}$$

où A et B sont des constantes d'intégrations. En réutilisant la première ligne du système Eqs.(36), on montre que $A + B = 0$. Finalement la solution est donc

$$u(x,t) = \frac{1}{c_1 + c_2}\left[c_2\phi\,(x - c_1t) + c_1\phi\,(x + c_2t)\right]. \tag{42}$$

(d) En remplaçant les lenteurs par l'inverse des vitesses, *i.e.* $s_1 \to 1/c_1$ et $s_2 \to 1/c_2$, cette nouvelle équation devient

$$u_{xx} + (s_1 - s_2)u_{xt} - s_1 s_2 u_{tt} = u_{xx} + (\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2})u_{xt} - \frac{1}{c_1 c_2}u_{tt} \tag{43}$$
$$= u_{xx} + \frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2}u_{xt} - \frac{1}{c_1 c_2}u_{tt} \tag{44}$$
$$= -\frac{1}{c_1 c_2}\left(-c_1 c_2 u_{xx} + (c_1 - c_2)u_{xt} + u_{tt}\right) \tag{45}$$
$$= -\frac{1}{c_1 c_2}\left(u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1 c_2 u_{xx}\right). \tag{46}$$

Les deux problèmes sont donc équivalents lorsque les lenteurs et les vitesses se correspondent, *i.e.*

$$u_{xx} + (s_1 - s_2)u_{xt} - s_1 s_2 u_{tt} = 0 \Leftrightarrow u_{tt} + (c_1 - c_2)u_{xt} - c_1 c_2 u_{xx} = 0. \tag{47}$$

La solution du nouveau problème est donc simplement obtenue en remplaçant les vitesses par les lenteurs dans la solution de la sous question précédente. Soit

$$u(x,t) = \frac{1}{c_1 + c_2}\left[c_2 \phi\left(x - c_1 t\right) + c_1 \phi\left(x + c_2 t\right)\right] \tag{48}$$
$$= \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}\left[\frac{1}{s_2}\phi\left(x - \frac{t}{s_1}\right) + \frac{1}{s_1}\phi\left(x + \frac{t}{s_2}\right)\right] \tag{49}$$
$$= \frac{1}{s_1 + s_2}\left[s_1 \phi\left(x - \frac{t}{s_1}\right) + s_2 \phi\left(x + \frac{t}{s_2}\right)\right]. \tag{50}$$

E3 : Caractéristiques (10 Points)

On considère les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad 2u_t + (4x+3)u_x = 0, \\ &\text{(b)} \quad 2u_t + (4x+3u)u_x = 0, \end{aligned}$$

définies pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et assorties chacune de la condition initiale $u(x, 0) = 4x + 2$.

Pour les cas (a) (40%) et (b) (60%),
— classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
— déterminer la solution et l'équation des lignes caractéristiques,
— esquisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -1, 0, 1$.

Solution

(a) L'équation à résoudre devient

$$u_t + \frac{(4x+3)}{2}\, u_x = 0. \tag{51}$$

EDP linéaire homogène d'ordre 1.
A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{52}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0, \tag{53}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t), t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{54}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4x+3}{2}, \tag{55}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = K\exp(2t) - \frac{3}{4}, \quad K \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \tag{57}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = K - \frac{3}{4}, \tag{58}$$

et la constante K

$$K = x_0 + \frac{3}{4}. \tag{59}$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{3}{4}\right)\ \exp(2t) - \frac{3}{4}. \tag{60}$$

Finalement, la solution est

$$u(x,t) = \phi(x_0) = 4x_0 + 2, \tag{61}$$
$$= (4x+3)\ \exp(-2t) - 1. \tag{62}$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(60) peut être utilisée pour différents x_0.

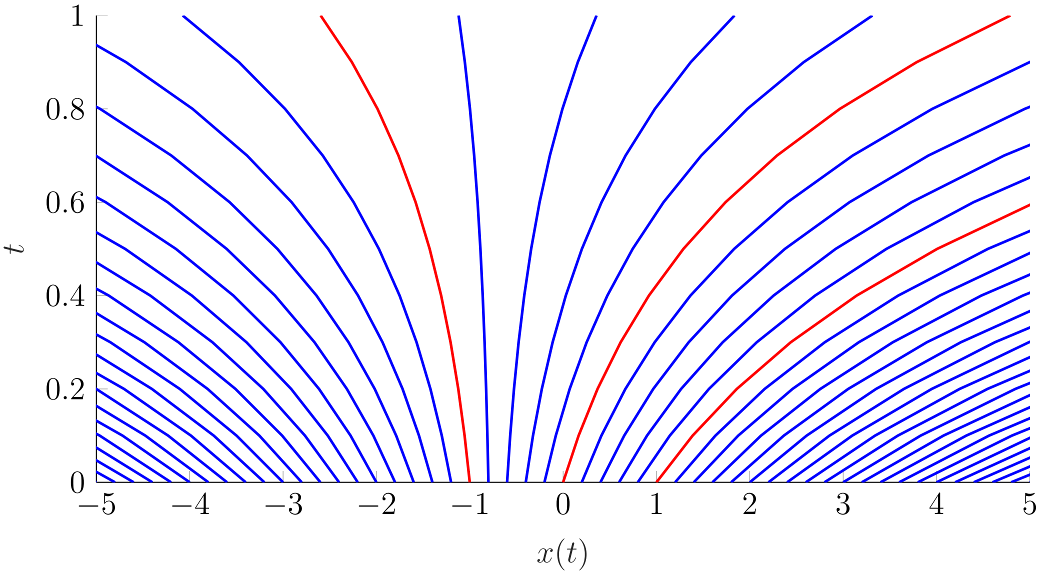

FIGURE 1 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.

(b) L'équation à résoudre devient

$$u_t + \frac{(4x+3u)}{2}\ u_x = 0. \tag{63}$$

EDP non-linéaire et homogène d'ordre 1.
A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\ \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{64}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = 0, \tag{65}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t),t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{66}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$
\begin{aligned}
& & \frac{dx}{dt} &= \frac{4x + 3u(x(t),t)}{2}, && (67)\\
&\Rightarrow & \frac{dx}{dt} &= \frac{4x + 3C_1}{2}, && (68)\\
&\Rightarrow & \frac{dx}{dt} - 2x &= \frac{3C_1}{2}, && (69)\\
&\Rightarrow & x(t) &= K\exp(2t) - \frac{3}{4}\,C_1, \quad K \in \mathbb{R}. && (70)
\end{aligned}
$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t),t) = C_1 = u(x(0),0) = \phi(x_0) = 4x_0 + 2. \tag{71}$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = K\exp(2t) - 3x_0 - \frac{3}{2}. \tag{72}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$
\begin{aligned}
& & x(0) = x_0 &= K - 3x_0 - \frac{3}{2}, && (73)\\
&\Rightarrow & K &= 4x_0 + \frac{3}{2}. && (74)
\end{aligned}
$$

les lignes caractéristiques deviennent

$$
\begin{aligned}
& & x(t) &= \left(4x_0 + \frac{3}{2}\right)\exp(2t) - 3x_0 - \frac{3}{2}, && (75)\\
&\Rightarrow & x_0 &= \frac{x - \frac{3}{2}\left(\exp(2t) - 1\right)}{4\exp(2t) - 3}. && (76)
\end{aligned}
$$

Finalement, la solution est

$$u(x,t) = 2\,\frac{2x + \exp(2t)}{4\exp(2t) - 3}. \tag{77}$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(75) peut être utilisée pour différents x_0.

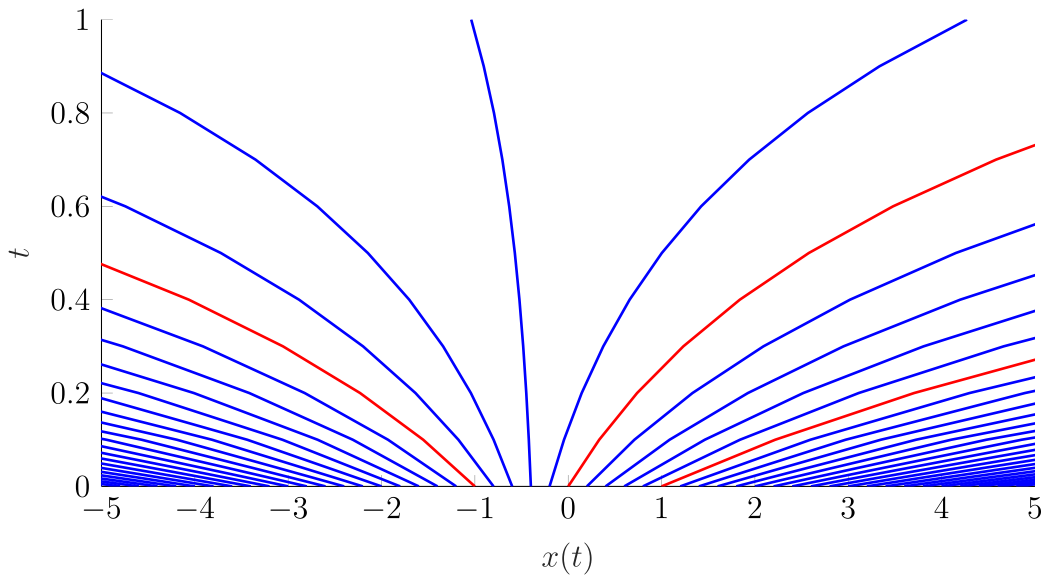

FIGURE 2 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.